Ion GOIAN Raisa GRIGOR Vasile MARIN Florentin SMARANDACHE

Algebra

în exerciții și probleme pentru liceu



Mulțimi, operații cu mulțimi

Relații, funcții

Elemente de combinatorică

CARTIER educațional

Ion GOIAN Raisa GRIGOR Vasile MARIN Florentin SMARANDACHE

Algebra

în exerciții și probleme pentru liceu

Mulțimi, operații cu mulțimi

Relații, funcții

Elemente de combinatorică

CARTIER educațional

CARTIER
Editura Cartier SRL, str. Bucureşti, nr. 68, Chişinău, MD2012.
Tel./fax: 24 83 68. E-mail: cartier@mdl.net
Editura Codex 2000 SRL, str. Paul Ionescu, nr. 6, sectorul 1, Bucureşti.
Tel./fax: 01/223 44 88. GSM: 094 30 49 15.

Difuzare:
Bucureşti: str. Paul Ionescu, nr. 6, sectorul 1.
Tel./fax: 01/223 44 88. GSM: 094 30 49 15.
Chişinău: bd. Mircea cel Bătrîn, nr. 9, sectorul Ciocana. Tel.: 34 64 61.

ALGEBRA ÎN EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU LICEU
(Mulţimi, operaţii cu mulţimi. Relaţii, funcţii. Elemente de combinatorică.)
Autori: Ion Goian, Raisa Grigor, Vasile Marin, Florentin Smarandache.
Coperta: Vitalie Coroban
Prepress: Centrul de Matematică Aplicată şi Informatică

Cărţile CARTIER pot fi procurate în toate librăriile bune
din România şi Republica Moldova.

LIBRĂRIILE CARTIER
Casa Cărţii, bd. Mircea cel Bătrîn, nr. 9, sectorul Ciocana, Chişinău. Tel.: 34 64 61.
Librăria din Hol, str. Bucureşti, nr. 68, Chişinău, MD2012.

Tipărit în Republica Moldova de Concernul Presa. Comanda 1147
ISBN 9975-79-040-2

Cuvânt înainte

Prezenta lucrare conţine exerciţii şi probleme de algebră, grupate pe capitole, pentru clasele superioare de licee şi şcoli medii de cultură generală. Scopul ei este pregătirea matematică a elevilor din liceele de toate categoriile şi va fi utilă în lucrul de sine stătător. De asemenea, lucrarea poate fi folosită pentru lucrul extraşcolar, deoarece cititorul va găsi în ea teoreme şi formule importante, noţiuni şi definiţii de bază care nu întotdeauna sunt incluse în manualele şcolare.

Autorii

Notaţii

$=$	egal;
$\neq$	diferit;
$\in$	aparţine;
$\notin$	nu aparţine;
$\subseteq$	inclus în;
$\supseteq$	include pe;
$\cup$	reuniune;
$\cap$	intersecţie;
$\emptyset$	mulţimea vidă;
$\vee$	(sau) disjuncţie;
$\wedge$	(şi) conjuncţie;
$p \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} q$	prin definiţie p este q;
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$	mulţimea numerelor naturale;
$\mathbf{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$	mulţimea numerelor întregi;
$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n}\middle\vert\, m,n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}$	mulţimea numerelor raţionale;
$\mathbb{R}$	mulţimea numerelor reale;
$\mathbf{C} = \{a+bi \mid a,b \in R,\ i^2 = -1\}$	mulţimea numerelor complexe;

$A_+ = \{x \in A \mid x > 0\},\ A \in \{\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}\}$;

$A_- = \{y \in A \mid y < 0\},\ A \in \{\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}\}$;

$A^* = \{z \in A \mid z \neq 0\} = A \setminus \{0\},$
$A \in \{\mathbb{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}, \mathbf{C}\}$;

$\lvert x\rvert$	modulul (valoarea absolută) lui $x \in \mathbb{R}$;
$[x]$	partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$;

$\{x\}$	partea fracţionară a lui $x \in I\!R$, $0 \leq \{x\} < 1$;
(a, b)	cuplul având ca prim element pe a şi ca al doilea element pe b (se mai zice "pereche ordonată");
(a, b, c)	triplet cu elementele respective a, b, c;
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$	produsul cartezian dintre mulţimea A şi mulţimea B;
$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$	produsul cartezian dintre mulţimile A, B, C;
E	mulţimea universală;
$P(E) = \{X \mid X \subseteq E\}$	mulţimea părţilor (submulţimilor) mulţimii E;
$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall) x \in E (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	egalitatea mulţimilor A şi B;
$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall) x \in E (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	A se include în B;
$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \vee x \in B\}$	reuniunea mulţimilor A şi B;
$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \in B\}$	intersecţia mulţimilor A şi B;
$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	diferenţa dintre mulţimile A şi B;
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	diferenţa simetrică;
$C_E(A) = \overline{A} = E \setminus A$	complimentara mulţimii A în raport cu mulţimea E;
$\alpha \subseteq A \times B$	relaţia α definită pe mulţimile A şi B;
$f: A \longrightarrow B$	funcţie (aplicaţie) definită pe A cu valori în B;
$D(f)$	domeniul de definiţie al funcţiei f;
$E(f)$	domeniul de valori ale funcţiei f.

CAPITOLUL I

Mulţimi. Operaţii cu mulţimi

1.1. Definiţii şi notaţii

Teoria axiomatică a mulţimilor este foarte dificilă pentru a fi expusă la un nivel elementar, de aceea, intuitiv, prin **mulţime** vom înţelege o colecţie de obiecte pe care le vom numi **elemente** sau **puncte** ale acestei mulţimi. O mulţime este definită dacă sunt date elementele sale sau dacă se dă o proprietate pe care o au toate elementele sale, proprietate care le deosebeşte de elementele altei mulţimi. Ulteror mulţimile le vom nota cu majuscule: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, iar elementele lor cu minuscule: $a, b, c, \ldots, x, y, z$ etc.

Dacă a este un element al mulţimii A, vom scrie $a \in A$ şi vom citi "a aparţine lui A" sau "a este element din A". Pentru a exprima că a nu este un element al mulţimii A, vom scrie $a \notin A$ şi vom citi "a nu aparţine lui A".

Printre mulţimi admitem existenţa unei mulţimi notate $\varnothing$, numită **mulţime vidă**, care nu conţine nici un element.

Mulţimea ce conţine un singur element a o notăm cu $\{a\}$. Mai general, mulţimea ce nu conţine alte elemente decât elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o notăm prin $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Dacă A este o mulţime toate elementele căreia posedă proprietatea P, atunci vom scrie $A = \{x | x \text{ verifică } P\}$ sau $A = \{x | P(x)\}$ şi vom citi: A constă din acele şi numai acele elemente ce posedă proprietatea P (pentru care predicatul $P(x)$ este adevărat).

Vom folosi notaţiile:

$I\!N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – mulţimea numerelor naturale;

$I\!N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – mulţimea numerelor naturale nenule;

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – mulţimea numerelor întregi;

$\mathbf{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ – mulţimea numerelor întregi nenule;

$\mathbf{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ – mulţimea numerelor raţionale;

$\mathbf{Q}^*$ – mulţimea numerelor raţionale nenule;

$\mathbb{R}$ – mulţimea numerelor reale;

$\mathbb{R}^*$ – mulţimea numerelor reale nenule;

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$;

$\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ – mulţimea numerelor complexe;

$\mathbf{C}^*$ – mulţimea numerelor complexe nenule;

$m \in \{1, 2, \ldots, n\} \Leftrightarrow m = \overline{1, n}$;

$D(a) = \{c \in \mathbf{Z}^* | a \vdots c\}$ – mulţimea tuturor divizorilor întregi ai numărului $a \in \mathbf{Z}$;

$n(A) = |A|$ – numărul elementelor mulţimii finite A.

Notă. *Vom considera cititorul familiarizat cu simbolurile logice: conjuncţia* $\wedge$ *(... şi ...), disjuncţia* $\vee$ *(... sau ...), implicaţia* $\Rightarrow$*, cuantificatorul existenţial* $(\exists)$ *şi cuantificatorul universal* $(\forall)$.

Fie A şi B două mulţimi. Dacă toate elementele mulţimii A sunt şi elemente ale mulţimii B, atunci spunem că A **este inclusă în** B sau că A este **o parte a lui** B, sau că A este o **submulţime** a mulţimii B şi notăm $A \subseteq B$. Deci

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall) x\ (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Proprietăţile incluziunii: a) $(\forall) A$, $A \subseteq A$ (reflexivitate);
b) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (tranzitivitate); c) $(\forall) A$, $\varnothing \subseteq A$.

Dacă A nu este o parte a mulţimii B, atunci scriem $A \not\subseteq B$, adică

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists) x\ (x \in A \wedge x \notin B).$$

Vom spune că **mulţimea** A **este egală cu mulţimea** B, pe scurt $A = B$, dacă ele constău din unele şi aceleaşi elemente, adică

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Proprietăţile egalităţii. Oricare ar fi mulţimile A, B şi C, avem:
a) $A = A$ (reflexivitate); b) $(A = B) \Rightarrow (B = A)$ (simetrie);
c) $(A = B \wedge B = C) \Rightarrow (A = C)$ (tranzitivitate).

Prin $P(A)$ vom nota **mulţimea tuturor părţilor mulţimii** A, adică

$$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A.$$

Evident, $\varnothing$, $A \in P(A)$.

Mulţimea **universală**, mulţimea ce conţine toate mulţimile examinate în continuare, natura elementelor cărora este una şi aceeaşi, o vom nota prin E.

Operaţii cu mulţimi

Fie A şi B două mulţimi, $A, B \in P(E)$.

1. Intersecţia.

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \wedge x \in B\},$$

adică

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B), \tag{1}$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B). \tag{1'}$$

2. Reuniunea.

$$A \cup B = \{x \in E | x \in A \vee x \in B\},$$

adică

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B), \tag{2}$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B). \tag{2'}$$

3. Diferenţa.

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A \wedge x \notin B\},$$

adică

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B), \tag{3}$$

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B). \tag{3'}$$

4. Complementara unei mulţimi. Fie $A \in P(E)$. Diferenţa $E \setminus A$ este o submulţime a lui E, notată $C_E(A)$ şi numită **complementara lui A în raport cu E**, adică

$$C_E(A) = E \setminus A = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Cu alte cuvinte,

$$x \in C_E(A) \Leftrightarrow x \notin A, \tag{4}$$

$$x \notin C_E(A) \Leftrightarrow x \in A. \tag{4'}$$

Proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi

$A \cap A = A$, $A \cup A = A$ **(legile de idempotenţă).**

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ **(legile de comutativitate).**

$\begin{matrix}(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\end{matrix}$ **(legile de asociativitate).**

$\begin{matrix}A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{matrix}$ **(legile de distributivitate).**

$\begin{matrix}A \cup (A \cap B) = A, \\ A \cap (A \cup B) = A\end{matrix}$ **(legile de absorbţie).**

$$\begin{aligned} C_E(A \cup B) &= C_E(A) \cap C_E(B), \\ C_E(A \cap B) &= C_E(A) \cup C_E(B) \end{aligned} \quad \textbf{(legile lui de Morgan)}.$$

Două submulţimi "privilegiate" ale lui E sunt $\varnothing$ şi E. Pentru orice $A \in P(E)$, avem:

$$\varnothing \subseteq A \subseteq E,$$
$$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad C_E(\varnothing) = E,$$
$$A \cup E = E, \quad A \cap E = A, \quad C_E(E) = \varnothing,$$
$$A \cup C_E(A) = E, \quad A \cap C_E(A) = \varnothing,$$
$$C_E(C_E(A)) = A \text{ } \textbf{(principiul reciprocităţii)}.$$

Ulterior vom folosi notaţia $C_E(A) = \overline{A}$.

5. Diferenţa simetrică.

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proprietăţi. Oricare ar fi mulţimile A, B şi C, avem:

a) $A \vartriangle A = \varnothing$; b) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$ (**comutativitatea**);

c) $A \vartriangle \varnothing = \varnothing \vartriangle A = A$; d) $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B$;

e) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$ (**asociativitatea**);

f) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$; g) $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

6. Produs cartezian. Fie x şi y două obiecte. Mulţimea $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ ale cărei elemente sunt mulţimile $\{x\}$ şi $\{x, y\}$ se numeşte **pereche ordonată** (sau **cuplu ordonat**) cu prima componentă x şi a doua componentă y şi se notează cu (x, y). Având trei obiecte x, y şi z, notăm $(x, y, z) = ((x, y), z)$ şi numim **triplet ordonat**.

În general, având n obiecte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, notăm

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\ldots((x_1, x_2), x_3), \ldots x_n)$$

şi numim **sistem ordonat** de n elemente (sau **cortej** de lungimea n). Avem

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n).$$

Fie $A, B \in P(E)$. Mulţimea

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

se numeşte **produs cartezian** al mulţimilor A şi B. Evident, putem defini

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) | x \in A \wedge y \in b \wedge z \in C\}.$$

Mai general, produsul cartezian al mulţimilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in A_i,\ i = \overline{1, n}\}.$$

Pentru $A = B = C = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, avem

$$A \times A \stackrel{\text{def}}{=} A^2,\ A \times A \times A \stackrel{\text{def}}{=} A^3,\ \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ ori}} \stackrel{\text{def}}{=} A^n.$$

De exemplu $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Submulţimea

$$\Delta = \{(a,a) | a \in A\} \subseteq A^2$$

poartă numele de **diagonală** a mulţimii A^2.

Exemple. **1.** Fie $A = \{1,2\}$ şi $B = \{1,2,3\}$. Atunci

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

şi

$$B \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}.$$

Observăm că $A \times B \neq B \times A$.

2. Produsul cartezian $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se poate reprezenta geometric ca mulţimea tuturor punctelor unui plan în care s-a fixat un sistem rectangular de coordonate xOy, asociind fiecărui element $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ punctul $P(x,y)$ din plan de abscisă x şi ordonată y. Fie $A = [2;3]$ şi $B = [1;5] (A, B \subseteq \mathbb{R})$. Atunci $A \times B$ are ca reprezentare în plan dreptunghiul haşurat $KLMN$ (fig. 1.1), unde $K(2,1)$, $L(2,5)$, $M(3,5)$, $N(3,1)$.

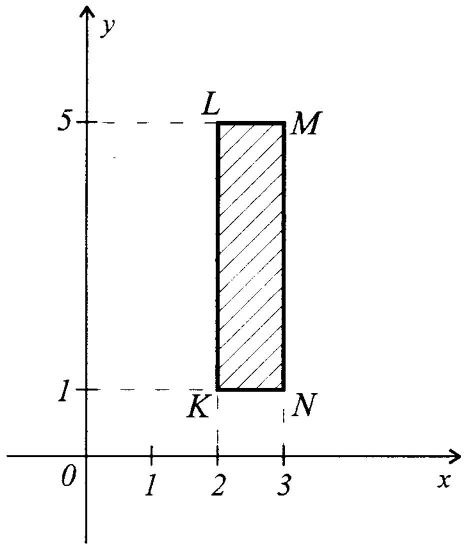


Fig. 1.1

Se verifică uşor proprietăţile:

a) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$;

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

c) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing \vee B = \varnothing)$,
$A \times B \neq \varnothing \Leftrightarrow (A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing)$.

7. Intersecţia şi reuniunea unei familii de mulţimi. O familie de mulţimi este o mulţime $\{A_i | i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$ ale cărei

elemente sunt mulţimile A_i, $i \in I$, $A_i \in P(E)$. Spunem că $\{A_i | i \in I\}$ este o familie de mulţimi **indexate** cu mulţimea I.

Fie o familie de mulţimi $\{A_i | i \in I\}$. **Reuniunea** sa (sau reuniunea mulţimilor A_i, $i \in I$) este mulţimea

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E | (\exists) i \in I\colon x \in A_i\}.$$

Intersecţia familiei date (sau intersecţia mulţimilor A_i, $i \in I$) este mulţimea

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E | x \in A_i, (\forall) i \in I\}.$$

În cazul $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, scriem

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

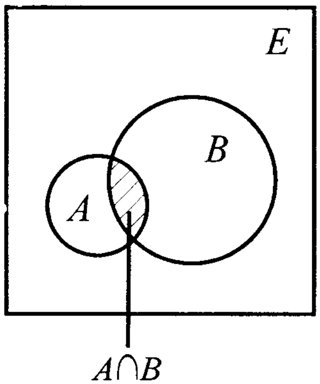
$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

8. Diagramele Euler-Wenn. Diagrame ale lui Euler (în SUA – ale lui Wenn) se numesc figurile cu ajutorul cărora se interpretează mulţimile (cercuri, pătrate, dreptunghiuri etc.) şi se demonstrează ilustrativ unele proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi. Vom folosi cercurile lui Euler.

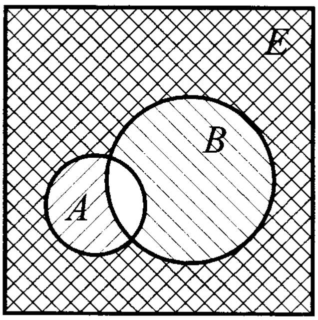
Exemplu. Folosind diagramele lui Euler, să se demonstreze legea lui de Morgan

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

Soluţie.



a)



b)

Fig. 1.2

În fig. 1.2,a) partea haşurată este $A \cap B$; cea nehaşurată (cea în afara $A \cap B$) reprezintă $C_E(A \cap B)$.

În fig. 1.2,b) partea pătratului haşurată cu \\\\ este egală cu $C_E(A)$, iar cea haşurată cu //// este egală cu $C_E(B)$. Toată partea haşurată formează $C_E(A) \cup C_E(B)$ (partea nehaşurată este exact $A \cap B$).

Din aceste două figuri se vede că $C_E(A \cap B)$ (partea pătratului nehaşurată în fig. 1.2,a) coincide cu $C_E(A) \cup C_E(B)$ (partea oricum haşurată din fig. 1.2,b), adică

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

1.2. Exerciţii rezolvate

1. Pentru orice două mulţimi A şi B, avem

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

Soluţie. Folosind definiţiile operaţiilor cu mulţimi, obţinem succesiv:

$$x \in A \setminus (A \setminus B) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin (A \setminus B)) \Leftrightarrow$$

$$\overset{(3')}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \Leftrightarrow$$

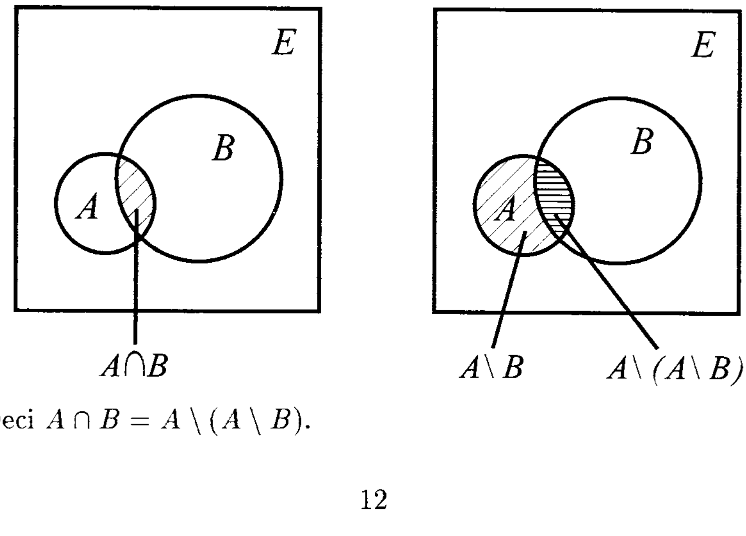
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B.$$

Din acest şir de echivalenţe rezultă

$$A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B \text{ şi } A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B),$$

ceea ce demonstrează egalitatea cerută.

Remarcă. *Egalitatea poate fi demonstrată şi cu ajutorul diagramelor lui Euler.*



Deci $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

2. Oricare ar fi $A, B \subseteq E$, are loc egalitatea

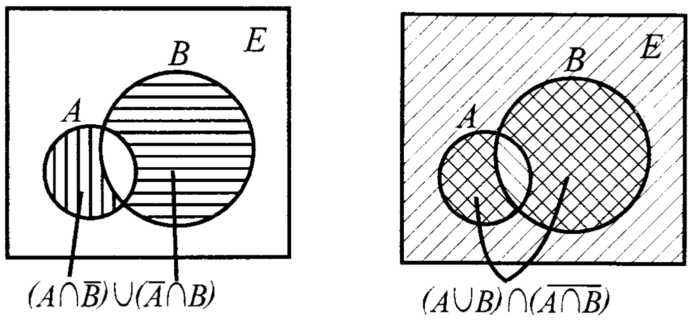
$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Soluție. **Metoda analitică.** Folosind definiţiile operaţiilor cu mulţimi, obţinem:

$$x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cap \overline{B}) \vee x \in (\overline{A} \cap B)) \Leftrightarrow$$
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} ((x \in A \wedge x \in \overline{B}) \vee (x \in \overline{A} \wedge x \in B)) \Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in A \vee$$
$$\vee x \in B) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B} \vee x \in B)) \overset{(2),(4')}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow (x \in (A \cup B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \overset{(1')}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow$$
$$\overset{(4)}{\Leftrightarrow} (x \in (A \cup B) \wedge x \in (\overline{A \cap B})) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Acest şir de echivalenţe demonstrează că egalitatea din enunţ este adevărată.

Metoda grafică. Folosind cercurile lui Euler, avem



a) b)

Fig. 1.3

În fig. 1.3,a) avem $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, ceea ce reprezintă partea haşurată a pătratului. Din fig. 1.3 se vede că $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) =$ $= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

3. Pentru oricare două mulţimi $A, B \subseteq E$, este adevărată echivalenţa

$$A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B.$$

Soluție. Fie $A \setminus B = B \setminus A$. Presupunem că $A \neq B$. Atunci există $a \in A$ cu $a \notin B$ sau $b \in B$ cu $b \notin A$.

În primul caz, obţinem $a \in A \setminus B$ şi $a \notin B \setminus A$, ceea ce contrazice egalitatea $A \setminus B = B \setminus A$. În al doilea caz, obţinem aceeaşi contradicţie.

Deci dacă $A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow A = B$.

Reciproc, evident.

4. Sunt date mulţimile $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$ şi $C = \{3,6,9\}$. Să se verifice egalităţile:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Soluţie. a) Avem $B \cup C = \{2,3,4,6,8,9,10\}$, $A \setminus (B \cup C) = \{1,5,7\}$, $A \setminus B = \{1,3,5,7,9\}$, $A \setminus C = \{1,2,4,5,7,8,10\}$, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1,5,7\} = A \setminus (B \cup C)$.

b) Pentru egalitatea a doua, avem

$$B \cap C = \{6\},\ A \setminus (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10\},$$
$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1,2,3,4,5,7,8,9,10\} = A \setminus (B \cap C).$$

5. Să se determine mulţimile A şi B ce satisfac simultan condiţiile:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$;

2) $A \cap B = \{3,4,5\}$;

3) $1 \notin A \setminus B$;

4) $2 \notin B \setminus A$.

Soluţie. Din 1) şi 2) rezultă $\{3,4,5\} \subseteq A \subseteq A \cup B$ şi $\{3,4,5\} \subseteq B \subseteq A \cup B$. Din 3) rezultă $1 \notin A$ sau $1 \in B$. Dacă $1 \notin A$, atunci din $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$ rezultă $1 \in B$. Însă dacă $1 \in B$, atunci $1 \notin A$, deoarece în caz contrar $1 \in A \cap B = \{3,4,5\}$. Deci rămâne $1 \in B$ şi $1 \notin A$. În mod analog, din 4) urmează $2 \notin B$ şi deci $2 \in A$. Cu alte cuvinte,

$$\{3,4,5\} \subseteq A \subseteq \{2,3,4,5\} \text{ şi } \{3,4,5\} \subseteq B \subseteq \{1,3,4,5\}$$

cu $2 \in A \cup B$, $1 \in A \cup B$ şi de aceea $A = \{2,3,4,5\}$, iar $B = \{1,3,4,5\}$.

Răspuns: $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,4,5\}$.

6. Fiind date mulţimile $A = \{11k + 8 | k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4m | m \in \mathbf{Z}\}$ şi $C = \{11(4n+1) - 3 | n \in \mathbf{Z}\}$, să se arate că $A \cap B = C$.

Soluţie. Pentru a obţine egalitatea cerută, vom demonstra adevărul echivalenţei

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in C.$$

Fie $x \in A \cap B$. Atunci $x \in A$ şi $x \in B$ şi de aceea există două numere întregi $k, m \in \mathbf{Z}$, astfel încât $x = 11k + 8 = 4m \Leftrightarrow \Leftrightarrow 11k = 4(m-2)$. În această egalitate membrul drept este divizibil prin 4, iar 11 cu 4 sunt primi între ei. Deci din $11k \vdots 4$ rezultă $k \vdots 4$, adică

$k = 4t$ pentru un $t \in \mathbf{Z}$. Atunci

$$x = 11k + 8 = 11 \cdot 4t + 8 = 11 \cdot 4t + 11 - 3 = 11(4t + 1) - 3,$$

ceea ce implică $x \in C$, adică am demonstrat implicaţia

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in C. \qquad (1)$$

Reciproc, fie $y \in C$. Atunci există $s \in \mathbf{Z}$ cu

$$y = 11(4s + 1) - 3 = 11 \cdot 4s + 11 - 3 = 11 \cdot 4s + 8 = 4(11s + 2).$$

Luând $4s = u \in \mathbf{Z}$ şi $11s + 2 = v \in \mathbf{Z}$, obţinem

$$y = 11u + 8 = 4v \in A \cap B,$$

ceea ce demonstrează adevărul implicaţiei

$$y \in C \Rightarrow y \in A \cap B. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă egalitatea cerută.

7. Sunt date mulţimile

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} 2x \leq 4x - 6 \\ 4x - 11 < 2x + 1 \end{cases} \right\} \text{ şi } B = A \cap \mathbb{N}.$$

Să se determine:

a) toate mulţimile X cu $B \cup X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

b) toate mulţimile $Y = \{y \in \mathbf{Z} | y^2 \in B \cup X\}$, astfel încât $B \cap Y = \{3\}$.

Soluţie. Determinăm mulţimea A:

$$\begin{cases} 2x \leq 4x - 6, \\ 4x - 11 < 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 6, \\ 2x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 6).$$

Atunci $B = [3; 6) \cap \mathbb{N} = \{3, 4, 5\}$.

a) Toate submulţimile posibile ale lui B sunt

$$\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\} = B.$$

Mulţimile căutate X sunt astfel, încât $X \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi deci vor fi de forma $X = C \cup \{6, 7, 8, 9\}$, unde $C \in P(B)$, adică mulţimile cerute în p. a) sunt:

$$X_1 = \{6, 7, 8, 9\}, X_2 = \{3, 6, 7, 8, 9\}, X_3 = \{4, 6, 7, 8, 9\},$$
$$X_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, X_5 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}, X_6 = \{3, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$X_7 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}, X_8 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

b) Deoarece $y \in \mathbf{Z}$, atunci $y^2 \in \mathbb{N}$ şi viceversa. Ţinând cont de $y^2 \in B \cup X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, obţinem $y^2 \in \{4, 9\}$, adică $y \in \{-3, -2, 2, 3\} = M$. Părţile mulţimii M sunt:

$$\varnothing, \{-3\}, \{-2\}, \{2\}, \{3\}, \{-3, -2\}, \{-3, 2\}, \{-3, 3\}, \{-2, 2\},$$
$$\{-2, 3\}, \{2, 3\}, \{-3, -2, 2\}, \{-3, -2, 3\}, \{-3, 2, 3\}, \{-2, 2, 3\}, M.$$

Din condiţia $B \cap Y = \{3\}$ rezultă că Y este una din mulţimile

$$Y_1 = \{3\}, Y_2 = \{-3, 3\}, Y_3 = \{-2, 3\}, Y_4 = \{2, 3\}, Y_5 = \{-3, -2, 3\},$$

$Y_6 = \{-3, 2, 3\}$, $Y_7 = \{-2, 2, 3\}$ şi $Y_8 = M = \{-3, -2, 2, 3\}$.

Răspuns: a) $X \in \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$;
b) $Y \in \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8\}$.

8. Să se determine $A, B, C \subseteq T$ şi $A \vartriangle B$, dacă

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ A \vartriangle C = \{1, 2\},\ B \vartriangle C = \{5, 6\},$$
$$A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}.$$

Soluţie. Din $A \cap C = B \cap C = \{3, 4\}$ rezultă că $\{3, 4\} \subseteq A \cap B \cap C$. Ştim că

$$A \vartriangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (A \cap C),$$
$$B \vartriangle C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus (B \cap C).$$

Atunci

$1 \in A \vartriangle C \Leftrightarrow (1 \in A \cup C \wedge 1 \notin A \cap C) \Leftrightarrow ((1 \in A \vee 1 \in C) \wedge 1 \notin A \cap C)$.

Sunt posibile cazurile:

a) $1 \notin A$ şi $1 \in C$;

b) $1 \in A$ şi $1 \notin C$

(cazul trei, $1 \in A$ şi $1 \in C \Rightarrow 1 \in A \cap C = \{3, 4\}$, este imposibil).

În primul caz, $1 \notin A$ şi $1 \in C$, din $B \vartriangle C = \{5, 6\}$ rezultă $1 \in B$, fiindcă în caz contrar $1 \notin B$ şi $1 \in C \Rightarrow 1 \in C \setminus B \subseteq B \vartriangle C = \{5, 6\}$. Deci, în acest caz avem $1 \in B \cap C = \{3, 4\}$, ceea ce este imposibil şi rămâne $1 \in A$, $1 \notin C$. În mod analog obţinem $2 \in A$, $2 \notin B$ şi $2 \notin C$, $5 \in B$ şi $5 \notin A$, $5 \notin C$, $6 \in B$ şi $6 \notin A$, $6 \notin C$.

Cu alte cuvinte, am obţinut:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 4\}$ şi $A \vartriangle B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Răspuns: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 4\}$ şi
$A \vartriangle B = \{1, 2, 5, 6\}$.

9. Se dau mulţimile $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Să se determine mulţimile:

a) $A \times B$; b) $B \times A$; c) A^2;
d) B^2; e) $(A \times B) \cap (B \times A)$; f) $(A \cup B) \times B$;
g) $(A \times B) \cup (B \times B)$.

Soluţie. Folosind definiţia produsului cartezian a două mulţimi, obţinem:

a) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$;

b) $B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$;

c) $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$;

d) $B^2 = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$;
e) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2)\}$;
f) $A \cup B = \{1,2,3\}$; $(A \cup B) \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$;
g) $(A \times B) \cup (B \times B) = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\} = (A \cup B) \times B$.

10. Se dau mulţimile $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{3, 4, y\}$. Să se determine x şi y, ştiind că $\{1,3\} \times \{2,4\} \subseteq A \times B$.

Soluție. Formăm mulţimile $A \times B$ şi $\{1,3\} \times \{2,4\}$:

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,y), (2,3), (2,4), (2,y), (x,3), (x,4), (x,y)\};$$

$$C = \{1,3\} \times \{2,4\} = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4)\}.$$

Deoarece $\{1,3\} \times \{2,4\} \subseteq A \times B$, obţinem

$$(1,2) \in C \Rightarrow (1,2) \in A \times B \Rightarrow (1,y) = (1,2) \Rightarrow y = 2;$$

$$(3,4) \in C \Rightarrow (3,4) \in A \times B \Rightarrow (3,4) = (x,4) \Rightarrow x = 3.$$

Pentru $x = 3$ şi $y = 2$, avem $(3,2) \in A \times B$.

Răspuns: $x = 3$, $y = 2$.

11. Dacă $A \supseteq B$, atunci

$$A \times B = ((A \setminus B) \times B) \cup B^2.$$

Demonstraţi.

Soluție. $B \subseteq A \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$ şi de aceea $A \times B = ((A \setminus B) \cup B) \times B = ((A \setminus B) \times B) \cup (B \times B) = ((A \setminus B) \times B) \cup B^2$ (am utilizat egalitatea $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$).

12. Câte elemente are mulţimea

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Q} \middle| x = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 1},\ n = \overline{1, 1000} \right\}?$$

Soluție. Mulţimea A are atâtea elemente câte valori diferite are fracţia $(n^2+1)/(2n^2+n+1)$, când n ia valorile $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Alegem valorile lui n pentru care fracţia ia valori egale.

Fie $m, l \in I\!N^*$, $m < l$ cu $\dfrac{m^2+1}{2m^2+m+1} = \dfrac{l^2+1}{2l^2+l+1}$. Atunci $(m^2+1)(2l^2+l+1) = (l^2+1)(2m^2+m+1) \Leftrightarrow (m-l)(m+l-ml+1) = 0 \overset{m \neq l}{\Leftrightarrow} m + l - ml + 1 = 0 \Leftrightarrow m(l-1) = l + 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{l+1}{l-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m = \frac{(l-1)+2}{l-1} \Leftrightarrow m = 1 + \frac{2}{l-1}.$$

Însă $m \in I\!N^*$ şi de aceea

$$m \in I\!N^* \Leftrightarrow \frac{2}{l-1} \in I\!N^* \Leftrightarrow 2 \vdots (l-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l-1=1, \\ l-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l=2, \\ l=3. \end{array}\right.$$

Pentru $l = 2$, obţinem $m = 3$, iar pentru $l = 3$, avem $m = 2$. Ţinând cont de faptul că $m < l$, obţinem $m = 2$ şi $l = 3$. Deci numai pentru $n = 2$ şi $n = 3$, se obţine acelaşi element al mulţimii A: $x = 5/11$.

Răspuns: mulţimea A are 999 de elemente, adică $n(A) = 999$.

13. Să se determine numerele întregi x, y pentru care afirmaţia $(x-1)\cdot(y-3) = 13$ este adevărată.

Soluţie. Notăm

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 | P(x)\colon (x-1)\cdot(y-3) = 13\}.$$

Deoarece 13 este număr prim, iar $x, y \in \mathbf{Z}$, sunt posibile cazurile:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=1, \\ y-3=13, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-1=-1, \\ y-3=-13, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-1=13, \\ y-3=1, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x-1=-13, \\ y-3=-1, \end{array}\right.$$

adică propoziţia $P(x)$ este adevărată numai în situaţiile:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2, \\ y=16, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=0, \\ y=-10, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=14, \\ y=4, \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=-12, \\ y=2. \end{array}\right.$$

Răspuns: $A = \{(2,16), (0,-10), (14,4), (-12,2)\}$.

14. Să se determine mulţimea

$$A = \{x \in I\!R | \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0, \quad a,b,c \in I\!R\}.$$

Soluţie. Deoarece $\sqrt{a+x} \geq 0$, $\sqrt{b+x} \geq 0$, $\sqrt{c+x} \geq 0$, rezultă că egalitatea $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$ este posibilă, dacă şi numai dacă avem simultan:

$$a + x = b + x = c + x = 0 \Leftrightarrow x = -a = -b = -c.$$

Atunci:

a) dacă cel puţin două dintre numerele a, b şi c sunt diferite, nu putem avea egalitatea $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$, adică în acest caz $A = \varnothing$;

b) dacă $a = b = c$, atunci $x = -a$ şi $A = \{-a\}$.

Răspuns: 1) pentru $a = b = c$, avem $A = \{-a\}$; 2) dacă cel puţin două din numerele a, b şi c sunt diferite, atunci $A = \varnothing$.

15. Să se determine mulţimea

$$A = \{x \in \mathbf{Z} | \min(x+2, 4 - x/3) \geq 1\}.$$

Soluţie. Sunt posibile situaţiile:

$$x+2 \leq 4-x/3 \text{ sau } x+2 > 4-x/3.$$

Examinăm fiecare caz aparte:

1) $x+2 \leq 4-x/3 \Leftrightarrow 3x+6 \leq 12-x \Leftrightarrow 4x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3/2$.

În acest caz, avem:

$$\min(x+2, 4-x/3) \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Toate numerele întregi x pentru care $-1 \leq x \leq 3/2$ sunt: $-1, 0, 1$.

2) $x+2 > 4-x/3 \Leftrightarrow x > 3/2$. Atunci

$\min(x+2, 4-x/3) \geq 1 \Leftrightarrow 4-x/3 \geq 1 \Leftrightarrow 12-x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq 9$.

Toate numerele întregi x pentru care $3/2 < x \leq 9$ sunt: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Am obţinut astfel:

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Răspuns: $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

16. Să se determine valorile parametrului real m pentru care mulţimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} | (m-1)x^2 - (3m+4)x + 12m + 3 = 0\}$$

are:

a) un element;

b) două elemente;

c) este vidă.

Soluţie. Mulţimea A coincide cu mulţimea soluţiilor ecuaţiei pătrate

$$(m-1)x^2 - (3m+4)x + 12m + 3 = 0 \qquad (1)$$

şi rezolvarea problemei s-a redus la determinarea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are o soluţie, două soluţii diferite şi nu are soluţii.

a) Ecuaţia (1) are o singură (două egale) soluţie, dacă şi numai dacă $D = 0$ pentru $a = m-1 \neq 0$ sau în cazul când $a = m-1 = 0$. Examinăm aceste cazuri:

1) $D = (3m+4)^2 - 4(m-1)(12m+3) = -39m^2 + 60m + 28 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \\ m = \dfrac{30 + 2\sqrt{498}}{39}. \end{array} \right.$$

2) Pentru $m = 1$, ecuaţia (1) ia forma $-5x + 15 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 3$. Deci mulţimea A constă dintr-un singur element pentru

$$m \in \left\{ \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, 1, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right\}.$$

b) Ecuaţia (1) are două rădăcini diferite, dacă şi numai dacă $D > 0$, adică

$$D > 0 \Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right).$$

c) Ecuaţia (1) nu are rădăcini $\Leftrightarrow D < 0 \Leftrightarrow 39m^2 - 60m - 28 >$
$$> 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39} \right) \bigcup \left(\frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}, +\infty \right).$$

Răspuns: a) $m \in \left\{ \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, 1, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right\}$;

b) $m \in \left\{ \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39}, \frac{30 + 2\sqrt{498}}{39} \right\}$;

c) $m \in \left(-\infty, \frac{30 - 2\sqrt{498}}{39} \right) \bigcup \left(\frac{30 + 2\sqrt{498}}{39}, +\infty \right)$.

17. Fie mulţimile $A = \{3,4,5\}$ şi $B = \{4,5,6\}$. Să se scrie elementele mulţimilor $A^2 \cap B^2$ şi $(A \setminus (B \setminus A)) \times (B \cap A)$.

Soluţie. a) Pentru prima mulţime avem:

$$A^2 = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\},$$
$$B^2 = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\},$$
$$A^2 \cap B^2 = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}.$$

b) Pentru mulţimea a doua avem:

$$B \setminus A = \{6\}, A \setminus (B \setminus A) = A, B \cap A = \{4,5\}.$$

Atunci $A \times (B \cap A) = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$.

Răspuns: $A^2 \cap B^2 = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$;
$A \setminus (B \setminus A) \times (B \cap A) = \{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$.

18. Fiind date mulţimile $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ şi $B = \{2,3,4\}$, să se rezolve ecuaţiile $A \vartriangle X = A \setminus B$ şi $(A \vartriangle Y) \vartriangle B = C_A(B)$.

Soluţie. Pentru a rezolva ecuaţiile din enunţ, folosim proprietăţile diferenţei simetrice: $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B$, asociativitatea şi comutativitatea ei.

a) $A \vartriangle X = A \setminus B \Rightarrow A \vartriangle (A \vartriangle X) = A \vartriangle (A \cap B) \Rightarrow X = A \vartriangle (A \setminus B)$.
Însă $A \setminus B = \{1,5,6,7\}$, $A \setminus (A \setminus B) = \{2,3,4\}$, $(A \setminus B) \setminus A = \varnothing$ şi de aceea

$$X = A \vartriangle (A \setminus B) = (A \setminus (A \setminus B)) \cup ((A \setminus B) \setminus A) =$$
$$= A \setminus (A \setminus B) = \{2,3,4\} = B.$$

b) $(A \vartriangle Y) \vartriangle B = A \setminus B \Leftrightarrow (A \vartriangle B) \vartriangle Y = A \setminus B \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (A \vartriangle B) \vartriangle ((A \vartriangle B) \vartriangle Y) = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \setminus B) \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \setminus B).$$

Calculăm
$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 5, 6, 7\} \cup \varnothing = \{1, 5, 6, 7\}.$$

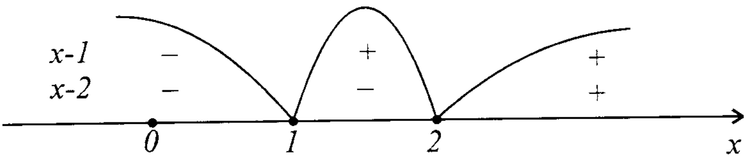
Deci
$$Y = (A \setminus B) \vartriangle (A \setminus B) = \varnothing.$$

Răspuns: $X = B$, $Y = \varnothing$.

19. Sunt date mulţimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |2-x| > 3 + x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-4) \times \times (x+3)(x+2)^2 \leq 0\}$. Să se determine mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \cup B) \setminus (B \setminus A)$ şi $\overline{A} \times (B \setminus A)$.

Soluţie. 1) Determinăm mulţimile A şi B.

a) $x \in A \Leftrightarrow |x-1| + |2-x| > 3 + x \Leftrightarrow |x-1| + |x-2| > 3 + x \quad (*)$



Inecuaţia $*$ este echivalentă cu totalitatea a trei sisteme de inecuaţii:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, 1), \\ 1 - x + 2 - x > 3 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [1; 2), \\ x - 1 + 2 - x > 3 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [2, +\infty), \\ x - 1 + x - 2 > 3 + x, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (-\infty, 1), \\ x < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [1; 2), \\ x < -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [2, +\infty), \\ x > 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

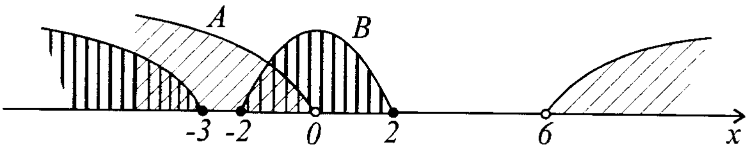
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 0), \\ x \in \varnothing, \\ x \in (6, +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

Deci
$$A = (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

b) $x \in B \Leftrightarrow (x^2-4)(x+3)(x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)^3(x+3)(x-2) \leq$
$$\leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [-2; 2].$$

Cu alte cuvinte,
$$B = (-\infty, -3] \cup [-2; 2].$$

2) Determinăm mulţimile cerute cu ajutorul reprezentării grafice



a) $A \cup B = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty)$

b) $A \cap B = (-\infty, -3] \cup [-2; 0)$

c) $\overline{A} = C_{I\!R}(A) = [0; 6]$

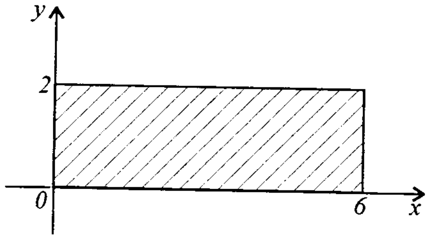
d) $\overline{B} = C_{I\!R}(B) = (-3, -2) \cup (2, +\infty)$

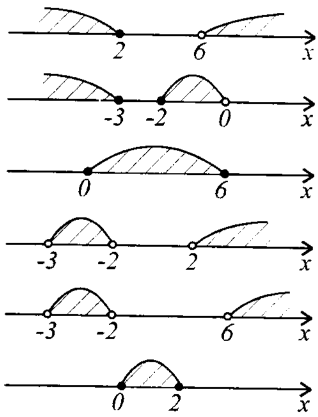
e) $A \setminus B = (-3, -2) \cup (6, +\infty)$

f) $B \setminus A = [0; 2]$

g) $(A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \varnothing$

h) $\overline{A} \times (B \setminus A) = \{(x, y) \in I\!R^2 | x \in [0; 6],\ y \in [0; 2]$





20. 40 de elevi au scris o lucrare de control la matematică, care conţine o problemă, o inecuaţie şi o identitate. Trei elevi au rezolvat corect numai problema, 5 elevi numai inecuaţia, 4 elevi au demonstrat numai identitatea, 7 elevi nu au rezolvat numai problema, 6 elevi – numai inecuaţia, 5 elevi nu au demonstrat numai identitatea. Ceilalţi elevi au rezolvat totul corect. Câţi elevi de aceştea sunt?

Soluţie. Fie A mulţimea elevilor care au rezolvat corect numai

problema. B – numai inecuaţia, C – au demonstrat numai identitatea, D – mulţimea elevilor care au rezolvat numai problema şi inecuaţia, E – mulţimea elevilor care au rezolvat numai problema şi au demonstrat identitatea, F – mulţimea elevilor care au rezolvat numai inecuaţia şi au demonstrat identitatea, iar G – mulţimea elevilor care au rezolvat totul corect.

Din condiţiile puse rezultă că $n(A) = 3$, $n(B) = 5$, $n(C) = 4$, $n(D) = 8$, $n(E) = 7$, $n(F) = 9$.

Dar deoarece fiecare din elevii care au scris lucrarea a rezolvat cel puţin un punct al lucrării corect şi întrucât mulţimile A, B, C, D, E, F, G au ca elemente comune numai elementele mulţimii vide, reuniunea mulţimilor A, B, C, D, E, F, G este mulţimea elevilor care au scris lucrarea.

Prin urmare, $n(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) + n(F) + n(G)$. Deci $n(G) = n(A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G) - n(A) - n(B) - n(C) - n(D) - n(E) - n(F) = 40 - 3 - 5 - 4 - 8 - 7 - 9 = 4$.

Răspuns: Deci 4 elevi dintre cei care au scris lucrarea au rezolvat totul corect.

21. (Problema matematicianului Dodjson.)

Într-o luptă încordată 72 din 100 de piraţi au pierdut un ochi, 75 – o ureche, 80 – o mână şi 85 – un picior. Ce număr minim de piraţi au pierdut în acelaşi timp ochiul, urechea, mâna şi piciorul?

Soluţie. Notăm prin A mulţimea piraţilor cu un ochi, prin B – mulţimea piraţilor cu o ureche, prin C – mulţimea piraţilor cu o mână şi prin D – mulţimea piraţilor cu un picior.

În problemă se cere de apreciat mulţimea $A \cap B \cap C \cap D$.

Este evident că mulţimea universală E este alcătuită din mulţimea $A \cap B \cap C \cap D$ şi din numărul piraţilor care au păstrat ori ambii ochi, ori amândouă urechi, ori amândouă mâni, ori amândouă picioare.

De aceea $E = (A \cap B \cap C \cap D) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$. De aici reiese că mulţimea E nu este mai mică (nu are un număr mai mic de elemente) decât suma numerelor de elemente ale mulţimilor $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ şi $A \cap B \cap C \cap D$ (egalitatea ar fi avut loc numai în cazul când mulţimile $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ şi $\overline{D}$ două câte două nu se intersectează).

Dar $n(\overline{A}) = 30$, $n(\overline{B}) = 25$, $n(\overline{C}) = 20$, şi $n(\overline{D}) = 15$. Deci substituind, avem $n(E) = 100$, adică $100 \leq n(A \cap B \cap C \cap D) + 30 + 25 + 20 + 15$. Prin urmare, $n(A \cap B \cap C \cap D) \geq 100 - 30 - 25 - 20 - 15 =$

$= 10$.

Aşadar, nu mai puţin de 10 piraţi au pierdut în acelaşi timp ochiul, urechea, mâna şi piciorul.

Răspuns: Nu mai puţin de 10 piraţi.

22. Din 100 de elevi 28 studiază limba engleză, 8 – limbile engleză şi germană, 10 – limbile engleză şi franceză, 5 – limbile franceză şi germană, 3 elevi studiază toate trei limbi. Câţi elevi studiază numai o limbă? Câţi elevi nu studiază nici o limbă?

Soluție. Fie A mulţimea elevilor care studiază limba engleză, B – limba germană, C – limba franceză.

Atunci mulţimea elevilor care studiază limbile engleză şi germană este $A \cap B$, engleză şi franceză – $A \cap C$, franceză şi germană – $B \cap C$, engleză, germană şi franceză – $A \cap B \cap C$, mulţimea elevilor care studiază cel puţin una din aceste trei limbi este $A \cup B \cup C$.

Din condiţiile de mai sus rezultă că elevii care studiază numai limba engleză alcătuiesc mulţimea $A \setminus (A \cap B) \cup (A \cap C)$, numai germana – $B \setminus (A \cap B) \cup (B \cap C)$, numai franceza – $C \setminus (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Dar deoarece $A \cap B \subseteq A$, avem $n(A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))) = n(A) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) = n(A) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)) =$

$$= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

În mod analog, $n(B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C))) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$;

$n(C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Fie D mulţimea elevilor care studiază numai o limbă, atunci

$$n(D) = n(A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))) + n(B \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C))) + n(C \setminus ((A \cap C) \cup (B \cap C))).$$

Prin urmare, $n(D) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(A \cap C) - 2n(B \cap C) + 3n(A \cap B \cap C) = 28 + 30 + 42 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 63$. $n(D) = 63$.

Numărul elevilor care nu studiază nici o limbă este egal cu diferenţa dintre numărul total de elevi şi numărul elevilor care studiază cel puţin una din aceste limbi, adică $n(H) = n(T) - n(A \cup B \cup C)$, unde H este mulţimea elevilor care nu studiază nici o limbă, iar T – mulţimea celor 100 de elevi.

Din problema 20 avem $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) -$

$-n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C) = 28 + 30 + 42 -$ $-8 - 10 - 5 + 3 = 80$. Deci $n(H) = 100 - 80 = 20$.

Răspuns: 63 de elevi studiază numai o limbă, 20 de elevi nu studiază nici o limbă.

1.3. Exerciţii propuse

1. Care din afirmaţiile următoare sunt adevărate şi care sunt false?

a) $x \in \{x\}$; b) $x = \{x\}$;
c) $x \neq \{x\}$; d) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
e) $\varnothing = \{\varnothing\}$; f) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
g) $\varnothing = \{a\}$; h) $\varnothing \in \{a\}$;
i) $\varnothing \subseteq \{a\}$; j) $\{x\} \subseteq \{x\}$;
k) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; l) $\{1,3,3\} = \{1,\{2,3\},3\}$;
m) $\{1,2,3,4,5\} = \{4,1,3,5,2,4,5\}$; n) $\{3-1, 6+3\} = \{2, 5+3\}$;
o) $\{a + a\} = \{2a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate şi care sunt false (A, B şi C sunt mulţimi arbitrare)?

a) $(A \in B$ şi $B \in C) \Rightarrow A \in C$;
b) $(A \subseteq B$ şi $B \in C) \Rightarrow A \in C$;
c) $(A \neq B$ şi $B \neq C) \Rightarrow A \neq C$;
d) $(A \cap B \subseteq \overline{C}$ şi $A \cup C \subseteq B) \Rightarrow A \cap C = \varnothing$;
e) $(A \subseteq (\overline{B \cup C})$ şi $B \subseteq (\overline{A \cup C})) \Rightarrow B = \varnothing$;
f) $(A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$ şi $C \subseteq A) \Rightarrow A = B = C$;
g) $P(A \cup B) = \{A_1 \cup B_1 | A_1 \in P(A),\ B_1 \in P(B)\}$;
h) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$;
i) $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$;
j) $A \subseteq B \cup C \Rightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$;
k) $E \subseteq A \Rightarrow A = E$;
l) $A \subseteq B \Rightarrow B \cup C \subseteq A \cup C$;
m) $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow B \subseteq \overline{A}$;
n) $A \subseteq \overline{B} \Rightarrow (A \cap B = \varnothing$ şi $A \cup B = E)$.

3. Fie $A = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 - 12x + 35 = 0\}$,
$B = \{x \in \mathbf{Q} | x^2 + 2x - 35 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{Q} | (x^2+1)(7x-1) = 0\}$.

a) Să se determine mulţimile A, B şi C.

b) Să se precizeze dacă numerele 1/5, 5, 7, 1/2 aparţin sau nu acestor mulţimi.

4. Să se determine mulţimile
$A = \{x \in I\!N^* | x = 2n,\ n = \overline{1,9}\}$,
$B = \{y \in I\!N^* | y = 4m + 6n,\ m = \overline{1,3},\ n = \overline{-1,0}\}$.

5. Fie $A = \{x \in I\!N | x = 4n + 6m,\ n, m \in I\!N^*\}$.
a) Să se scrie trei elemente ale mulţimii A.
b) Stabiliţi dacă $26, 28, 33$ sunt elemente din A.

6. Să se indice proprietăţile caracteristice ale elementelor mulţimilor: $A = \{4, 7, 10\}$, $B = \{3, 6, 12\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $D = \{1, 8, 27, 64, 125\}$.

7. Câte elemente au mulţimile:
$A = \{x \in \mathbf{Q} | x = 3n/(n+2),\ n = \overline{1,50}\}$,
$B = \{y \in \mathbf{Q} | y = (n-1)/(2^{n+1}),\ n = \overline{1,10}\}$,
$C = \{z \in I\!R | z = (an+b)/(cn+d),\ a, b, c, d \in I\!R,\ cd > 0,\ n = \overline{1,p}\}$?

8. Fie dată mulţimea $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Să se determine submulţimile lui A:
$A_1 = \{x \in A | P(x)\colon\ 2x + 1 = x\}$,
$A_2 = \{y \in A | \mathbf{Q}(y)\colon\ |y| = y\}$,
$A_3 = \{z \in A | R(x)\colon\ |z| = -z\}$.

9. Să se determine mulţimile:
a) $A = \{x \in \mathbf{Z} | \min(x+1,\ 4 - 0.5x) \geq 1\}$;
b) $B = \{x \in \mathbf{Z} | \max(x-2,\ 13 - 2x) \leq 6\}$;
c) $C = \{x \in I\!N^* | \min(3x-1,\ 2x+10) \leq 20\}$;
d) $D = \{x \in I\!N^* | \max(20 - x,\ (45 - 2x)/3) > 13\}$;
e) $E = \{x \in \mathbf{Z} | \min(2x+7,\ 16 - 3x) > 0\}$;
f) $F = \{x \in \mathbf{Z} | \max(x-1,\ 1-x) \leq 4\}$;
g) $G = \{x \in I\!R | \min(x-1,\ (13-x)/2) < 3\}$;
h) $H = \{x \in I\!R | \max(x+1,\ 7-x) > 5\}$;
i) $I = \{x \in \mathbf{Z} | \max(x+1,\ 4 - 0.5x) \leq 1\}$;
j) $J = \{x \in I\!N^* | \min(20 - x,\ (45-2x)/3) \geq 20\}$;
k) $K = \{x \in \mathbf{Z} | \min(x+2,\ 10-x) > -2\}$;
l) $L = \{x \in \mathbf{Z} |\ |x-4| < 8\}$.

10. Să se compare ($\subset$, $\supset$, $=$, $\not\subset$, $\not\supset$) mulţimile A şi B, dacă:
a) $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{2n+1}{n+4},\ n \in I\!N^*\right\}$, $B = \{x \in A | x < 2\}$;

b) $A=\left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x=\frac{3n^2+1}{n^2+n},\ n \in I\!N^*\right\}$, $B=\{x \in A | 2 \leq x < 3\}$;

c) $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 + 5x + 10 = n^2,\ n \in I\!N\}$, $B = \{-6, -3, -2, 1\}$;

d) $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 + 3x - 3 = n^2,\ n \in I\!N\}$, $B = \{-7, -4, 1, 4\}$;

e) $A = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 + 11x + 20 = n^2,\ n \in I\!N\}$, $B = \{-16, 5\}$;

f) $A = \{x \in \mathbf{R} |\ |x-1|+|x-2| > 5\}$, $B = \{x \in I\!R | (5/(x-4)) > -1\}$;

g) $A = \{x \in \mathbf{R} |\ |x| + |1 - x| \geq 2\}$, $B = \{x \in I\!R | 4x^2 - 4x - 3 \geq 0\}$;

h) $A = \{x \in \mathbf{R} |\ 4x^2 - 4x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x \in I\!R | (3/(x + 1)) < 1\}$.

11. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Folosind simbolurile $\cup$, $\cap$, $\setminus$, C (complementara), exprimaţi cu ajutorul lui A, B şi $I\!N^*$ mulţimile:

a) $A_1 = \{5, 6, 7\}$;

b) $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$;

c) $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

d) $A_4 = \{8, 9, 10, \ldots\}$;

e) $A_5 = \{8, 9, 10\}$;

f) $A_6 = \{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, \ldots\}$;

g) $A_7 = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

12. Să se determine mulţimea E, în caz că nu este indicată, şi părţile sale A, B, C care satisfac concomitent condiţiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{5\}$;

b) $\overline{A} = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$, $\overline{B} = \{2, 6, 18, 20\}$, $A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}$;

c) $A \cap B = \{1, 3\}$, $\overline{A} = \{5, 6, 7, 9, 10\}$, $A \vartriangle B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$;

d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 4\}$, $A \cap B \not\subseteq \{3, 4, 5\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

e) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B \cap C = \{4\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $A \setminus C = \{1, 3\}$, $5 \notin A \cup B$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

f) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $1 \in A$, $\{2, 4\} \cap B = \varnothing$, $3 \in A \cap B \cap C$, $4 \in A \cap C$, $A \cap B \not\subseteq C$, $B \cup C \not\subseteq A$, $A \cup B \cup C = E$;

g) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B = E$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $\{2, 3, 4, 5\} \cap B \not\subseteq A$, $\{1, 4\} \cap A \not\subseteq B$;

h) $E = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B \cup C = E$, $A \cap B \not\subset C$, $A \cap C \not\subset B$, $B \cap C = \{2\}$, $1 \in B \setminus C$;

i) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B = E$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $5 \notin A \setminus B$, A are mai multe elemente ca B;

j) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup B \cup C = E$, $A \cap B \cap C = \{5\}$,

$A \setminus B = \{1, 3, 6\}$, $A \setminus C = \{1, 2, 4\}$;

k) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\} \not\subset B$, A are mai puţine elemente ca B;

l) $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\overline{B} = \{1, 5, 6, 7\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{8, 9, 10\}$;

m) $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{d, f, i\}$, $A \cup \{c, d, e\} = \{a, c, d, e, f, h, i\}$, $B \cup \{d, h\} = \{b, c, d, e, f, g, h, i\}$;

n) $E = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $A \cap B = \{4, 6, 9\}$, $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$, $B \cup \{4, 8\} = \{2, 3, \ldots, 9\}$.

13. Să se determine mulţimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \vartriangle B, A \cup (B \setminus A), A \setminus (B \setminus A), A \times B, B \times A, (A \cup B) \times A, B \times (A \setminus B)$, dacă:

a) $A = \left\{x \in I\!N \middle| x = \dfrac{8n - 18}{2n - 9}, n \in I\!N\right\}$,

$B = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| x = \dfrac{9n^2 - 48n + 16}{3n - 8}, n \in I\!N\right\}$;

b) $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{2n + 1}{2n - 3}, n \in I\!N\right\}$,

$B = \left\{y \in \mathbf{Q} \middle| y = \dfrac{3k + 1}{3k - 2}, k \in I\!N\right\}$;

c) $A = \left\{x \in I\!N \middle| x = \dfrac{4n}{n + 2}, n \in I\!N\right\}$,

$B = \left\{y \in \mathbf{Z} \middle| y = \dfrac{6n + 7}{3n + 1}, n \in I\!N\right\}$;

d) $A = \left\{x \in I\!N \middle| \dfrac{2x + 5}{x + 1} \in I\!N\right\}$,

$B = \left\{x \in I\!N \middle| y = \dfrac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1}, n \in I\!N\right\}$;

e) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \frac{x+1}{3-x} \geq 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \frac{x^2-6x+6}{x-1} \in \mathbf{Z}\right\}$;

f) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \frac{3-x}{5+x} \geq 1\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{3-x}{5+x} \geq 1\right\}$;

g) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \frac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z}\right\}$;

h) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| \frac{x^2-5x+6}{x+3} \in \mathbf{Z}\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| \frac{x^2-5x+6}{x+3} \in \mathbf{Z}\right\}$;

i) $A = \{x \in \mathbb{N}^* | x = 2n, n = \overline{1,10}\}$,
$B = \{y \in \mathbb{N}^* | y = 4m + 6n,\ m = \overline{1,3},\ n \in \{-1, 0\}\}$;

j) $A = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-7| + |x+7| = 14\}$,
$B = \{x \in \mathbf{Z} |\ |x+3| + |x-9| = 14\}$;

k) $A = \{n^2 - 5 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 + 5 | n \in \mathbb{N}\}$;

l) $A = \{n^2 - 50 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 + 50 | n \in \mathbb{N}\}$;

m) $A = \{n^2 - 500 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n^2 + 500 | n \in \mathbb{N}\}$;

n) $A = \{x \in \mathbb{R} | x - \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 8x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0\}$.

14. Fie $M = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \frac{7n-4}{n+3},\ n \in N^*\right\}$.

a) Să se determine mulţimile:
$A = \{x \Leftrightarrow M | x \leq 6\}$, $B = \{x \in M | x < 7\}$, $C = \{x \in M | x \in \mathbf{Z}\}$.

b) Câte elemente are mulţimea $D = \{x \in M | x \leq (699/100)\}$?

15. Să se determine mulţimile A, $B \subseteq E$, dacă
$A \triangle B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $\overline{A} = \{5, 6, 7, 9, 10\}$,
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

16. Să se determine mulţimea E şi părţile sale A şi B, dacă $\overline{A} = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$, $\overline{B} = \{2, 6, 18, 20\}$, $A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}$.

17. Comparaţi mulţimile A şi B, dacă:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x^2 - 25} < x + 1\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} x + 1 > 0, \\ x^2 - 25 < (x+1)^2 \end{cases}\right\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x^2 - 16} \cdot (x^2 - 80) \leq \sqrt{x^2 - 16}\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, \\ x^2 - 80x \leq 1 \end{cases}\right\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{6 + x - x^2} > 2x - 1\}$,

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \begin{cases} 6 + x - x^2 \geq 0, \\ 2x - 1 \geq 0, \\ 6 + x - x^2 > (2x - 1)^2, \end{cases}\right\};$$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} | 2x - 3 - \dfrac{1}{x - 5} < x - 4 - \dfrac{1}{x - 5}\right\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} | 2x - 3 < x - 4\}$;

e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\dfrac{5}{2}(x - x^2 - 1)(x + 4) < -\dfrac{5}{2}(x - x^2 - 1)(3x + 1)\right\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} | x + 4 < 3x + 1\}$;

f) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \dfrac{2}{\sqrt{x} + 1} < 0\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left(\dfrac{2}{\sqrt{x} + 1}\right)^2 < 0\right\}$;

g) $A = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x + 3} \cdot \sqrt{x - 3} < 1/2\}$,
$B = \{x \in \mathbb{R} | 2\sqrt{(x + 3)(x - 3)} < 1\}$.

18. Să se determine valorile parametrului real m pentru care mulţimea A are un element, două elemente sau este vidă, dacă:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + mx + 1 = 0\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{R} | mx^2 - 5x + m = 0\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx + 3 = 0\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 4m + 3 = 0\}$;
e) $A = \{x \in \mathbb{R} | (m + 1)x^2 - (5m + 4)x + 4m + 3 = 0\}$;
f) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx + 36 = 0\}$;
g) $A = \{x \in \mathbb{R} | (2m - 1)x^2 + 2(1 - m)x + 3m = 0\}$;
h) $A = \{x \in \mathbb{R} | mx^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0\}$.

19. Să se determine numărul de elemente ale mulţimii A:

a) $A = \{x \in \mathbf{Q} | x = (n^2 + 3)/(n^2 + n),\ n = \overline{1, 50}\}$;

b) $A = \left\{x \in \mathbf{Q} \middle| x = \dfrac{z}{(z + 6)(z + 5)},\ z \in \mathbf{Z},\ |z| \leq 45\right\}$;

c) $A = \{x \in \mathbf{Z} | (x^2 + 1)(5 - x^2) \geq 0\}$;

d) $A = \{x \in \mathbf{Z} | (x^2 - 3)(x^2 - 33)(x^2 - 103)(x^2 - 203) < 0\}$;

e) $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \middle| x = \dfrac{z + 4}{z + 1},\ z \in \mathbf{Z}\right\}$;

f) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x = \dfrac{z + 4}{z + 1},\ z \in \mathbf{Z}\right\}$.

20. Se consideră mulţimile A, B, C. Să se determine $A \cap B \cap C$.

a) $A = \{10x + 3 | x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{12y + 7 | y \in \mathbb{N}\}$,
$C = \{15z + 13 | z \in \mathbb{N}\}$;

b) $A = \{15n - 700 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{270 - 10m | m \in \mathbb{N}\}$,
$C = \{48k + 56 | k \in \mathbb{N}\}$.

21. Să se determine $A \cap B$, dacă:

a) $A = \{6n + 7 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{114 - 7m | m \in \mathbb{N}\}$;

b) $A = \{3p + 28 | p \in \mathbb{N}\}$, $B = \{107 - 14q | q \in \mathbb{N}\}$;

c) $A = \{3n - 2 | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{1003 - 2m | m \in \mathbb{N}\}$.

22. Să se demonstreze proprietăţile operaţiilor cu mulţimi (vezi p. 1.1).

23. Să se demonstreze egalităţile (A, B, C etc. mulţimi arbitrare):

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$;

f) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

g) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

h) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

j) $(A \cap B) \triangle A = A \setminus B$;

k) $A \cup (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$;

l) $A \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$;

m) $A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$.

24. Fiind date mulţimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ şi $D = \{4, 5, 6\}$, să se scrie elementele următoarelor mulţimi:

a) $(A \times A) \cap (B \times B)$;

b) $A^2 \times C^2$;

c) $(A \setminus B) \times (C \setminus D)$;

d) $(A \cap B) \times (C \cap B)$;

e) $(A \cup B) \times (B \cup D)$;

f) $(A \times B) \setminus (C \times D)$;
g) $(A \setminus B) \times (C \cap B)$;
h) $(A \setminus C) \times (B \setminus D)$;
i) $(A \setminus (C \setminus D)) \times ((D \setminus B) \cup A)$;
j) $(A \vartriangle B) \times (D \vartriangle B)$.

25. Fiind date mulţimile A, B şi C, rezolvaţi ecuaţiile $(A\, f\, B) \vartriangle X = C$, unde $f \in \{\cup, \cap, \setminus, \vartriangle\}$:
a) $A = \{1,4,6\}$, $B = \{5,7,9\}$, $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;
b) $A = \{4,5,6\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $C = \{1,5,6,7\}$.

26. Să se determine mulţimile $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup (B \setminus \overline{A})$, $A \cap (\overline{A} \setminus B)$, dacă:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)(2+x)(4-x) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 7x + 12 \leq 0\}$;
b) $A = \{x \in \mathbb{R} | 4x^2 - 12x + 5 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1/2 < x < 5/2\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq 2x + 7 \leq 3\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 4)(x + 1) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 > 0\}$;
e) $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x(x+7) = x^2 + 3x\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} 5x^2 = 6x, \\ 5x + 4 = 0 \end{array} \right. \right\}$;
f) $A = \{x \in \mathbb{R} | (x^2 - 4x)(x + 1) < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 < 0\}$;
g) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3x(x - 2) - (x + 1)(x - 13) = 0\}$,
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x^2 + 7 = 0, \\ 13x^2 - 14x + 9 = 0 \end{array} \right. \right\};$$
h) $A = \{x \in \mathbb{R} | 3(x - 9)^2 - 2(x - 9) - 16 = 0\}$,
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} x^2 - 14x + 49 = 0, \\ x - \frac{9}{5}\left(x + \frac{4}{3}\right) = \frac{39}{2} \end{array} \right. \right\};$$
i) $A = \{x \in \mathbb{R} | 4(2x - 3)^2 - 4(2x - 3) + 1 = 0\}$,
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}x^2 - x + 2 = 0, \\ 3(4x - 7)(x^2 + 1) = 0 \end{array} \right. \right\};$$
j) $A = \{x \in \mathbb{R} |\, |2x-1| < |4x+1|\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\, |3x-1| - |2x+3| \geq 0\}$;
k) $A = \{x \in \mathbb{R} |\, |4 - 3x| \geq 2 - x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\, |2x - 3| \geq 2x - 3\}$;
l) $A = \{x \in \mathbb{R} | 6x^2 - 2x + 1 \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2|x| - 3 \leq 0\}$;
m) $A = \{x \in \mathbb{R} |\, |x| + |x-1| < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\, |x+1| + |x-2| > 5\}$;
n) $A = \{x \in \mathbb{R} |\, ||x - 3| + 1| \geq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\, ||x - 1| + x| < 3\}$.

CAPITOLUL II

Relaţii, funcţii

2.1. Definiţii şi notaţii

I. Relaţii, tipurile lor. Compunerea relaţiilor.

Fie A şi B două mulţimi nevide, iar $A \times B$ produsul cartezian al lor. O submulţime $R \subseteq A \times B$ se numeşte **relaţie** între elementele lui A şi elementele lui B. În cazul când $A = B$, o relaţie $R \subseteq A \times A$ se numeşte **relaţie binară** definită pe mulţimea A.

Dacă există o relaţie $R \subseteq A \times B$, atunci pentru o pereche ordonată $(a, b) \in A \times B$ putem avea $(a, b) \in R$ sau $(a, b) \notin R$. În primul caz scriem aRb şi citim "a este în relaţia R cu b", iar în al doilea caz – $a \not R\, b$, care se citeşte "a nu este în relaţia R cu b". Reţinem deci că

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

Prin **domeniul de definiţie al relaţiei** $R \subseteq A \times B$ vom înţelege submulţimea $\delta_R \subseteq A$ ce constă din acele şi numai acele elemente ale mulţimii A ce se află în relaţia R cu un element din B, adică

$$\delta_R = \{x \in A | (\exists)\, y \in B,\ (x, y) \in R\}.$$

Prin **domeniul de valori al relaţiei** $R \subseteq A \times B$ vom înţelege submulţimea $\rho_R \subseteq B$ ce constă din acele şi numai acele elemente ale mulţimii B care se alfă în relaţia R cel puţin cu un element din A, adică

$$\rho_R = \{y \in B | (\exists)\, x \in A,\ (x, y) \in R\}.$$

Relaţia inversă. Dacă avem o relaţie $R \subseteq A \times B$, atunci prin **relaţie inversă** a relaţiei R vom înţelege relaţia $R^{-1} \subseteq B \times A$ definită de echivalenţa

$$(b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R,$$

adică

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}.$$

Exemplul 1. Fie $A = \{1,2\}$, $B = \{4,5,6\}$ şi relaţiile $\alpha = \{(1,5),(2,4),(2,6)\} \subseteq A \times B$, $\beta = \{(2,4),(2,5),(2,6)\} \subseteq A \times B$ şi $\gamma = \{(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\} \subseteq B \times A$.

Să se determine domeniul de definiţie şi domeniul de valori ale acestor relaţii şi relaţiile inverse respective.

Soluţie. a) $\delta_\alpha = \{1,2\} = A$, $\rho_\alpha = \{4,5,6\} = B$; $\alpha^{-1} = \{(5,1),(4,2),(6,2)\}$; $\delta_{\alpha^{-1}} = B$, $\rho_{\alpha^{-1}} = A$;

b) $\delta_\beta = \{2\}$, $\rho_\beta = \{4,5,6\} = B$; $\beta^{-1} = \{(4,2),(5,2),(6,2)\}$; $\delta_{\beta^{-1}} = B$, $\rho_{\beta^{-1}} = \{2\}$;

c) $\delta_\gamma = \{4,5\}$, $\rho_\gamma = \{1,2\} = A$; $\gamma^{-1} = \{(1,4),(2,4),(1,5),(2,5)\}$; $\delta_{\gamma^{-1}} = A$, $\rho_{\gamma^{-1}} = \{(4,5)\}$.

Compunerea relaţiilor. Fie A, B, C trei mulţimi şi să considerăm relaţiile $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$. Relaţia $R \circ S \subseteq A \times C$ construită în conformitate cu echivalenţa

$$(a,c) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists) b \in B\ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S),$$

adică

$$R \circ S = \{(a,c) \in A \times C | (\exists) b \in B((a,b) \in R \wedge (b,c) \in S)\} \subseteq A \times C,$$

se numeşte **compunerea relaţiilor** R şi S.

Exemplul 2. Fie $A, B, \alpha, \beta, \gamma$ cele din exemplul 1. Să se determine $\alpha \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta$, $\alpha \circ \gamma$, $\beta \circ \gamma$, $\beta^{-1} \circ \alpha$, $\beta^{-1} \circ \beta$, $\gamma \circ \beta^{-1}$, $\gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$ şi $(\beta \circ \gamma)^{-1}$.

Soluţie. Atragem atenţie că compusul relaţiilor $\alpha \subseteq C \times D$ cu $\beta \subseteq E \times E$ există, dacă şi numai dacă $D = E$.

a) Deoarece $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq A \times B$, rezultă că $\alpha \circ \alpha$ şi $\alpha \circ \beta$ nu există.

b) $\alpha \subseteq A \times B$ şi $\gamma \subseteq B \times A \Rightarrow \alpha \circ \gamma \in A \times A$. Determinăm $\alpha \circ \gamma$:

$(1,5) \in \alpha$ şi $(5,1) \in \gamma \Rightarrow (1,1) \in \alpha \circ \gamma$,

$(1,5) \in \alpha$ şi $(5,2) \in \gamma \Rightarrow (1,2) \in \alpha \circ \gamma$,

$(2,4) \in \alpha$ şi $\{(4,1), (4,2)\} \subseteq \gamma \Rightarrow \{(2,1), (2,2)\} \subseteq \alpha \circ \gamma$;

$(2,6) \in \alpha$, însă în γ nu avem nici o pereche cu prima componentă 6. Rezultă $\alpha \circ \gamma = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

c) $\beta \subseteq A \times B$, $\gamma \subseteq B \times A \Rightarrow \beta \circ \gamma$ există. Repetând raţionamentele din p. b), obţinem

$$\beta \circ \gamma = \{(2,1), (2,2)\}.$$

d) $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ şi $\alpha \subseteq A \times B \Rightarrow \beta^{-1} \circ \alpha \subseteq B \times B$ şi

$$\beta^{-1} \circ \alpha = \{(4,4), (4,6), (5,4), (5,6), (6,4), (6,6)\}.$$

e) $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ şi $\beta \subseteq A \times B \Rightarrow \beta^{-1} \circ \beta \subseteq B \times B$ şi

$$\beta^{-1} \circ \beta = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} = B^2.$$

f) $\beta \subseteq A \times B$ şi $\beta^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow \beta \circ \beta^{-1} \subseteq A \times A$ şi
$$\beta \circ \beta^{-1} = \{(2,2)\}.$$

g) $\gamma^{-1} \subseteq A \times B$ şi $\beta^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \subseteq A \times A$ şi
$$\gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = \{(1,2), (2,2)\}.$$

h) $(\beta \circ \gamma)^{-1} = \{(1,2), (2,2)\} = \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$.

Relaţia de egalitate. Fie A o mulţime. Relaţia
$$1_A = \{(x,x) | x \in A\} = \Delta \subseteq A \times A$$
se numeşte **relaţie de egalitate** pe A. Adică
$$x 1_A y \Leftrightarrow x = y.$$

De un real folos este

Teorema 1. *Fie A, B, C, D mulţimi şi $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$ relaţii. Atunci*

1) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (*asociativitatea compunerii relaţiilor*);
2) $1_A \circ R = R \circ 1_B = R$;
3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;
4) $(R^{-1})^{-1} = R$.

Relaţii de echivalenţă. Relaţia binară $R \subseteq A^2$ se numeşte:

a) **reflexivă**, dacă xRx oricare ar fi $x \in A$;
b) **simetrică**, dacă $(xRy \Rightarrow yRx)$, $(\forall) x, y \in A$;
c) **tranzitivă**, dacă $((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$, $(\forall) x, y, z \in A$;
d) **antisimetrică**, dacă $((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)$, $(\forall) x, y \in A$;
e) **relaţie de echivalenţă pe** A, dacă ea este reflexivă, simetrică şi tranzitivă;
f) **antireflexivă**, dacă $x \not{R} x$ oricare ar fi $x \in A$.

Fie R o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Pentru fiecare element $x \in A$, mulţimea
$$R_x = \{y \in A | xRy\}$$
se numeşte **clasa de echivalenţă** a lui x modulo R (sau în raport cu R), iar mulţimea
$$A/R = \{R_x | x \in A\}$$
se numeşte **mulţime factor** (sau **mulţime cât**) a lui A prin R.

Proprietăţile claselor de echivalenţă. Fie R o relaţie de echivalenţă pe o mulţime A şi $x, y \in A$. Atunci au loc următoarele afirmaţii:

1) $x \in R_x$;
2) $R_x = R_y \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y \in R_x$;

3) $R_x \neq R_y \Leftrightarrow R_x \cap R_y = \varnothing$;

4) $\bigcup\limits_{x \in A} R_x = A$.

Partiţii pe o mulţime. Fie A o mulţime nevidă. O familie de submulţimi $\{A_i | i \in I\}$ ale lui A se numeşte **partiţie pe** A (sau a lui A), dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1) $i \in I \Rightarrow A_i \neq \varnothing$;

2) $A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;

3) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

Teorema 2. *Pentru orice relaţie de echivalenţă R pe mulţimea A, mulţimea factor $A/R = \{R_x | x \in A\}$ este o partiţie a lui A.*

Teorema 3. *Pentru orice partiţie $S = \{A_i | i \in I\}$ a lui A, există o unică relaţie de echivalenţă α_S pe A, astfel ca*

$$A/\alpha_S = \{A_i | i \in I\}.$$

Relaţia $\alpha_S \subseteq A^2$ se construieşte după regula

$$x\alpha_S y \Leftrightarrow (\exists)\, i \in I \;\; (x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

Se stabileşte uşor că α_S este relaţie de echivalenţă pe A şi egalitatea cerută.

Exemplul 3. Definim pe mulţimea $\mathbf{Z}$ relaţia binară α în conformitate cu echivalenţa $a\alpha b \Leftrightarrow (a-b) \vdots n$, unde $n \in I\!N^*$, n fixat, $(\forall)\, a, b \in \mathbf{Z}$.

a) Să se demonstreze că α este relaţie de echivalenţă pe $\mathbf{Z}$.

b) Să se determine structura claselor de echivalenţă.

c) Să se construiască mulţimea factor $\mathbf{Z}/\alpha$. Aplicaţie: $n = 5$.

Soluţie. a) Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Atunci:

1) **reflexivitatea** $a - a = 0 \vdots n \Rightarrow a\alpha a$;

2) **simetria** $a\alpha b \Rightarrow (a-b) \vdots n \Rightarrow -(b-a) \vdots n \Rightarrow (b-a) \vdots n \Rightarrow b\alpha a$;

3) **tranzitivitatea** $(a\alpha b \wedge b\alpha c) \Rightarrow ((a-b) \vdots n \wedge (b-c) \vdots n) \Rightarrow$
$\Rightarrow ((a-b)+(b-c)) \vdots n \Rightarrow (a-c) \vdots n \Rightarrow a\alpha c$.

Din 1) – 3) urmează că α este relaţie de echivalenţă pe $\mathbf{Z}$.

b) Fie $a \in \mathbf{Z}$. Atunci

$$\alpha_a = \{b \in \mathbf{Z} | a\alpha b\} = \{b \in \mathbf{Z} | (b-a) \vdots n\} = \{b \in \mathbf{Z} | (\exists)\, t \in \mathbf{Z}\colon\, b-a = nt\} =$$
$$= \{b \in \mathbf{Z} | (\exists)\, t \in \mathbf{Z}\colon\, b = a + nt\} = \{a + nt | t \in \mathbf{Z}\}.$$

În conformitate cu teorema împărţirii cu rest pentru numerele întregi a şi n, obţinem

$$a = nq + r_a, \quad 0 \leq r_a \leq n-1.$$

Atunci

$$a + nt = nq + r_a + nt = r_a + (nt + nq) = r_a + ns,$$

unde $s = t + q \in \mathbf{Z}$, şi de aceea

$$\alpha_a = \{r_a + ns | s \in \mathbf{Z}\},$$

unde r_a este restul de la împărţirea lui a prin n. Însă

$$a = nq + r_a \Leftrightarrow a - r_a = nq \Leftrightarrow (a - r_a)\vdots n \Leftrightarrow a\alpha r_a \Leftrightarrow \alpha_a = \alpha_{r_a}.$$

Cu alte cuvinte, clasa de echivalenţă a lui $a \in \mathbf{Z}$ coincide cu clasa restului de la împărţirea lui a prin n.

c) Deoarece prin împărţirea la n se pot obţine numai resturile $0, 1, 2, \ldots, n-1$, din p. b) rezultă că avem exact n clase de echivalenţă diferite:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}.$$

De obicei se foloseşte notaţia $\alpha_i = \hat{i}$, $i = \overline{0, n-1}$. Atunci

$$\mathbf{Z}/\alpha = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\},$$

unde $\hat{i}$ constă din acele şi numai acele numere întregi care la împărţirea prin n dau restul i, $i = \overline{0, n-1}$.

Pentru $n = 5$, obţinem

$$\mathbf{Z}/\alpha = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\},$$

cu

$$\hat{0} = \{\pm 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots\} = \{5t | t \in \mathbf{Z}\},$$
$$\hat{1} = \{1 + 5q | q \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\},$$
$$\hat{2} = \{2 + 5s | s \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\},$$
$$\hat{3} = \{3 + 5u | u \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\},$$
$$\hat{4} = \{4 + 5v | v \in \mathbf{Z}\} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

Definiţie. *Relaţia α se numeşte* **relaţie de congruenţă modulo** n **pe** $\mathbf{Z}$, *iar clasa $\hat{a} = \alpha_a$ se numeşte* **clasă de rest modulo** n *şi elementele ei se numesc reprezentanţii acestei clase.*

Notaţia obişnuită:
$a\alpha b \Leftrightarrow (a - b)\vdots n \Leftrightarrow a \equiv b (\operatorname{mod} n)$ (a este congruent cu b modulo n), iar

$$\mathbf{Z}/\alpha = \mathbf{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$$

este mulţimea tuturor claselor de resturi modulo n.

Exemplul 4 (geometric). Fie π un plan şi L mulţimea tuturor dreptelor din plan. Definim pe L relaţia binară β în conformitate cu

$$d_1 \beta d_2 \Leftrightarrow d_1 \parallel d_2, \ (\forall)\, d_1, d_2 \in L.$$

a) Să se arate că β este o relaţie de echivalenţă pe L.

b) Să se descrie clasele de echivalenţă modulo β.

c) Să se indice mulţimea factor.

Soluție. a) Este evident că β este relaţie de echivalenţă (fiecare dreaptă este paralelă cu ea însăşi; dacă $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d_1$ şi

$$(d_1 \parallel d_2 \wedge d_2 \parallel d_3) \Rightarrow d_1 \parallel d_3).$$

b) Fie $d \in L$. Atunci clasa

$$\beta_d = \{l \in L | l\alpha d\} = \{l \in L | l || d\}$$

constă din acele şi numai acele drepte din L care sunt paralele cu dreapta d.

c) $L/\beta = \{\beta_d | d \in L\}$ este o mulţime infinită, deoarece în planul π avem o infinitate de direcţii.

Exemplul 5. Se dă mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ şi părţile ei $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4,6\}$, $A_3 = \{5,7,8\}$, $A_4 = \{9\}$, $B_1 = \{1,2,4\}$, $B_2 = \{2,5,6\}$, $B_3 = \{3,7,8,9,10\}$.

a) Să se arate că $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ este partiţie a lui A.

b) Să se determine relaţia de echivalenţă α_S pe A.

c) Este $T = \{B_1, B_2, B_3\}$ o partiţie pe A?

Soluție. a) 1) Observăm că $A_i \in S \Rightarrow A_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1,4}$;

2) $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_1 \cap A_4 = A_2 \cap A_3 = A_2 \cap A_4 = A_3 \cap A_4 = \emptyset$.

3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A$,

adică sistemul S de submulţimi ale mulţimii A defineşte o partiţie pe A.

b) În conformitate cu teorema 3, avem

$$(x,y) \in \alpha_S \Leftrightarrow x\alpha_S y \Leftrightarrow (\exists) i \in \{1,2,3,4\} \; (x \in A_i \wedge y \in A_i).$$

Deci

$\alpha_S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(3,6),(4,3),(4,4),(4,6),(6,3),$ $(6,4),(6,6),(5,5),(5,7),(5,8),(8,5),(8,8),(8,7),(7,5),(7,7),(7,8),(9,9)\}$.

c) 1) $B_i \in T \Rightarrow B_i \neq \emptyset$; $i = \overline{1,3}$;

2) $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A$;

3) $B_1 \cap B_2 = \{2\} \neq \emptyset$,

ceea ce demonstrează că sistemul T nu defineşte o partiţie pe A.

Relaţii de ordine. O relaţie binară R pe mulţimea A se numeşte **relaţie de ordine pe** A, dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Dacă R este o relaţie de ordine pe A, atunci şi R^{-1} este de asemenea o relaţie de ordine pe A (verificaţi!). De obicei, se notează relaţia R cu „$\leq$" şi relaţia R^{-1} cu "$\geq$", astfel că

$$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x.$$

Cu această notaţie, condiţiile că „$\leq$" este o relaţie de ordine pe mulţimea A se scriu:

reflexivitatea $x \in A \Rightarrow x \leq x$;

antisimetria $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$;

tranzitivitatea $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Exemplul 6. Pe mulţimea $\mathbb{N}$ definim relaţia binară γ în conformitate cu

$$a\gamma b \Leftrightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}(a = b \cdot k).$$

Să se arate că γ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{N}$.

Soluţie. Verificăm condiţiile din definiţia relaţiei de ordine.

1) **Reflexivitatea**

$$a = a \cdot 1 \Rightarrow a\gamma a, \ (\forall) a \in \mathbb{N}.$$

2) **Antisimetria.** Fie $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a\gamma b$ şi $b\gamma a$. Rezultă că există numerele naturale $c, d \in \mathbb{N}$ cu $a = b \cdot c$ şi $b = a \cdot d$. Atunci

$$a = b \cdot c = (a \cdot d) \cdot c = a \cdot (d \cdot c) \Rightarrow d \cdot c = 1 \Rightarrow d = c = 1,$$

ceea ce implică

$$a = b \cdot c = b \cdot 1 = b.$$

3) **Tranzitivitatea.** Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a\gamma b$ şi $b\gamma c$. Atunci există $u, v \in \mathbb{N}$ cu $a = bu$ şi $b = cv$ şi de aceea

$$a = bu = (cv)u = c(vu) \Rightarrow a\gamma c.$$

Deoarece $v \cdot u \in \mathbb{N}$, este adevărată implicaţia

$$(a\gamma b \wedge b\gamma c) \Rightarrow a\gamma c,$$

ceea ce demonstrează că γ este o relaţie de ordine pe mulţimea $\mathbb{N}$.

Remarcă. *Relaţia de ordine γ se numeşte relaţie de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ şi se notează $a \vdots b$, adică*

$$a\gamma b \Rightarrow a \vdots b \Leftrightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}(a = b \cdot k) \Leftrightarrow b | a$$

($b|a$ se citeşte "b divide pe a", iar $a \vdots b$ "a este divizibil prin b").

II. Relaţii funcţionale. Fie A şi B două mulţimi. O relaţie $R \subseteq A \times B$ se numeşte **aplicaţie** sau **relaţie funcţională**, dacă sunt satisfăcute condiţiile:

1) $(\forall) x \in A (\exists) y \in B$, astfel încât xRy;

2) $(xRy \wedge xRy_1) \Rightarrow y = y_1$.

O aplicaţie (sau **funcţie**) este un triplet $f = (A, B, R)$, unde A şi B sunt două mulţimi şi $R \subseteq A \times B$ este o relaţie funcţională.

Dacă $R \subseteq A \times B$ este o aplicaţie, atunci pentru fiecare element $x \in A$ există, conform condiţiilor 1) şi 2) de mai sus, un singur element $y \in B$, astfel că xRy; notăm acest element y cu $f(x)$. Deci

$$f(x) = y \Leftrightarrow xRy.$$

Elementul $f(x) \in B$ se numeşte **imaginea** elementului $x \in A$ prin aplicaţia f, mulţimea A se numeşte **domeniul de definiţie** al lui f notat prin $D(f) = A$, iar mulţimea B se numeşte **codomeniul** lui f şi spunem, de obicei, că f este o aplicaţie definită pe A cu valori în B. Relaţia funcţională R se numeşte şi **graficul** aplicaţiei (funcţiei) f, notat, ulterior, prin G_f. Pentru a arăta că f este o aplicaţie definită pe A cu valori în B, scriem $f\colon A \longrightarrow B$ sau $A \xrightarrow{f} B$, iar în loc de a descrie care este graficul lui R (al lui f), indicăm pentru fiecare $x \in A$ imaginea sa $f(x)$. Atunci

$$y = f(x) \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow xRf(x) \Leftrightarrow (x, f(x)) \in R = G_f,$$

adică

$$G_f = \{x, f(x))|x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Egalitatea aplicaţiilor. Două aplicaţii $f = (A, B, R)$ şi $g = (C, D, S)$ se numesc **egale** dacă şi numai dacă au acelaşi domeniu $A = C$, acelaşi codomeniu $B = D$ şi acelaşi grafic $R = S$. În cazul când $f, g\colon A \longrightarrow B$, egalitatea $f = g$ este echivalentă cu $f(x) = g(x), (\forall) x \in A$, adică

$$f = g \Leftrightarrow (\forall) x \in A\ (f(x) = g(x)).$$

Aplicaţia identică. Fie A o mulţime. Tripletul $(A, A, 1_A)$ este, evident, o aplicaţie, care se notează cu acelaşi simbol 1_A (sau ε) şi se numeşte **aplicaţie identică** a mulţimii A.

Avem

$$1_A(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in 1_A \Leftrightarrow x = y.$$

Prin urmare,

$$1_A\colon A \longrightarrow A \text{ şi } 1_A(x) = x \text{ pentru } (\forall) x \in A.$$

Prin $F(A, B)$ vom nota mulţimea funcţiilor definite pe A cu valori în B. Pentru $B = A$, vom folosi înscrierea $F(A)$ în loc de $F(A, A)$.

În cazul unei mulţimi finite $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, o funcţie $\varphi\colon A \longrightarrow A$ se dă uneori cu ajutorul unui tablou de forma

x	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$\varphi(x)$	$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	$\ldots$	$\varphi(a_n)$

,

în care în prima linie se trec elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ale mulţimii A, iar în a doua linie se trec imaginile respective ale acestora prin φ, anume $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$.

În cazul când $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, vom folosi pentru a determina aplicaţia $\varphi\colon A \longrightarrow A$ şi notaţia

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \dots & \varphi(n-1) & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

mai frecvent folosită pentru înscrierea aplicaţiilor bijective ale mulţimii A în ea însăşi. De exemplu, dacă $A = \{1, 2\}$, atunci elementele lui $F(A)$ sunt:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $f\colon A \longrightarrow B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, atunci introducem notaţiile:

$$f(X) = \{b \in B | (\exists)\, x \in X\colon f(x) = b\} = \{f(x) | x \in X\} \subseteq B$$

– **imaginea** submulţimii X prin aplicaţia f.

În caz particular, $\varphi(A) = \mathcal{I}m\varphi$, **imaginea aplicaţiei** φ;

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A | (\exists)\, y \in Y\colon f(a) = y\} = \{a \in A | f(a) \in Y\} \subseteq A$$

este **preimaginea** submulţimii Y prin aplicaţia f.

În caz particular, pentru $y \in B$, vom scrie în loc de $f^{-1}(\{y\})$ simplu $f^{-1}(y)$, adică

$$f^{-1}(y) = \{a \in A | f(a) = y\}$$

– mulţimea tuturor preimaginilor lui y prin aplicaţia f, iar

$$f^{-1}(B) = \{a \in A | \varphi(a) \in B\}$$

– **preimaginea completă** a mulţimii B prin aplicaţia f.

Compunerea aplicaţiilor. Considerăm aplicaţiile $f = (A, B, R)$ şi $g = (B, C, S)$, deci codomeniul lui f să coincidă cu domeniul lui g. Formăm tripletul $g \circ f = (A, C, R \circ S)$.

Atunci $g \circ f$ este de asemenea o aplicaţie, numită compusul aplicaţiei g cu aplicaţia f, iar operaţia "$\circ$ " se numeşte **compunerea aplicaţiilor.** Avem

$$(g \circ f)(x) = z \Leftrightarrow (x, z) \in R \circ S \Leftrightarrow (\exists)\, y \in B((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists)\, y \in B\colon xRy \wedge ySz \Leftrightarrow (\exists)\, y \in B\colon (f(x) = y \wedge g(y) = z) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(f(x)) = z,$$

adică

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ (\forall)\, x \in A.$$

Teorema 4. *Fie date aplicaţiile* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$. *Atunci*
a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *(asociativitatea compunerii aplicaţiilor);*
b) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Exemplul 7. Considerăm relaţiile $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şi $S \subseteq [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definite astfel: $xRy \Leftrightarrow x^2 = y$,
$$xSy \Leftrightarrow x = y^2, \quad xTy \Leftrightarrow y = x + 1.$$

A. Să se determine care din relaţiile R, R^{-1}, S, S^{-1}, T, T^{-1} sunt relaţii funcţionale.

B. Să se găsească funcţiile determinate în p. A.

C. Să se calculeze $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ h^{-1}$, $h^{-1} \circ h$ (f, g, h funcţiile din p. B.)

D. Să se calculeze $(f \circ h)(-3)$, $(h^{-1} \circ h)(1/2)$, $(h \circ f)(1/3)$.

Soluție. Rezolvăm A şi B concomitent.

a) Examinăm relaţia R.

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{R}, \text{ adică}$$

1) $(\forall) x \in \mathbb{R} (\exists) y = x^2 \in \mathbb{R}$, astfel încât xRy;

2) $(xRy \wedge xRy_1) \Rightarrow (y = x^2 \wedge y_1 = x^2) \Rightarrow y = y_1$, adică R este relaţie funcţională. Notăm aplicaţia determinată de R prin f, $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$.

b) Examinăm relaţia R^{-1}.

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y = x^2,$$

adică dacă $y \in \mathbb{R} = \{a \in \mathbb{R} | a < 0\}$, atunci nu există nici un $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $yR^{-1}x$, ceea ce demonstrează că R^{-1} nu este relaţie funcţională.

c) Pentru relaţia S, avem: S şi S^{-1} sunt relaţii funcţionale. Notăm prin $g = ([0, +\infty), [0, +\infty), S)$ şi $g^{-1} = ([0, +\infty), [0, +\infty), S^{-1})$ funcţiile (aplicaţiile) definite de S şi S^{-1}, respectiv.

d) Examinăm relaţia T:

1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{R}$ şi deci

$$(\forall) x \in \mathbb{R} (\exists) y = x + 1 \in \mathbb{R}, \text{ astfel că } xTy;$$

2) $(xTy \wedge xTy_1) \Rightarrow (y = x + 1 \wedge y_1 = x + 1) \Rightarrow y = y_1$, ce demonstrează că T este relaţie funcţională.

e) Pentru relaţia T^{-1}, obţinem:

$$yT^{-1}x \Leftrightarrow xTy \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1.$$

1) $(\forall) y \in \mathbb{R} (\exists) x = y - 1 \in \mathbb{R}$, astfel încât $yT^{-1}x$;

2) $(yT^{-1}x \wedge yT^{-1}x_1) \Rightarrow (xTy \wedge x_1Ty) \Rightarrow (y = x + 1 \wedge y = x_1 + 1) \Rightarrow x_1 + 1 = x + 1 \Rightarrow x_1 = x$, adică T^{-1} este de asemenea relaţie funcţională. Notăm prin $h = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$ şi $h^{-1} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T^{-1})$.

C. Din A şi B rezultă

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty),\ h(x) = x + 1,$$
$$x \in \mathbb{R},\ h^{-1}(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

a) Atunci $f \circ g$, $g \circ f$ şi $g \circ h$ nu există, fiindcă domeniile şi codomeniile nu coincid ($f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$, $g = ([0, +\infty), [0, +\infty), S)$, $h = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, T)$).

b) Calculăm $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ h^{-1}$ şi $h^{-1} \circ h$.

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x+1) = (x+1)^2;$$
$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = x^2 + 1;$$
$$(h \circ h^{-1})(x) = h(h^{-1}(x)) = h(x-1) = (x-1)+1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x);$$
$$(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(x+1) = (x+1)-1 = x = 1_{\mathbb{R}}(x).$$

Deci $f \circ h \neq h \circ f$ şi $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{R}}$.

D. Calculăm: $(f \circ h)(-3) = (x+1)^2/_{x=-3} = 4$, $(h^{-1} \circ h)(1/3) = 1/2$, $(h \circ f)(1/3) = (x^2+1)/_{x=1/3} = 1/9 + 1 = 10/9$.

Aplicaţii injective, surjective şi bijective. O aplicaţie $f\colon A \longrightarrow B$ se numeşte:

1) **injectivă**, dacă $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, $(\forall)\, a_1, a_2 \in A$ (echivalent: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$);

2) **surjectivă**, dacă $(\forall)\, b \in B\, (\exists)\, a \in A$: $f(a) = b$ (orice element din B are cel puţin o preimagine în A);

3) **bijectivă**, dacă f este injectivă şi surjectivă.

Remarcă. *Pentru a demonstra că o funcţie $f\colon A \longrightarrow B$ este surjectivă, trebuie ca ecuaţia $f(x) = b$ să fie rezolvabilă în A pentru orice $b \in B$.*

De un real folos sunt

Teorema 5. *Fiind date aplicaţiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, avem:*

a) *dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;*

b) *dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă;*

c) *dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă;*

d) *dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;*

e) *dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.*

Teorema 6. *Aplicaţia $f\colon A \longrightarrow B$ cu graficul $G_f = R$ este aplicaţie bijectivă, dacă şi numai dacă relaţia inversă R^{-1} este o relaţie funcţională (f^{-1} este aplicaţie).*

Această teoremă rezultă imediat din

$$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow y = f(x).$$

Aplicaţia inversă. Fie $f\colon A \longrightarrow B$ o aplicaţie bijectivă cu graficul $G_f = R$. Din teorema 6 rezultă că tripletul $f^{-1} = (B, A, R^{-1})$ este o aplicaţie (funcţie). Această funcţie se numeşte **inversa** funcţiei f. Avem

$$f^{-1}\colon B \longrightarrow A, \text{ iar pentru } y \in R,$$
$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow f(x) = y,$$

adică

$$(y,x) \in R^{-1} = G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (x,y) \in R = G_f.$$

Teorema 7. *Aplicația $f\colon A \longrightarrow B$ este bijectivă, dacă și numai dacă există o aplicație $g\colon B \longrightarrow A$ cu $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. În acest caz, avem $g = f^{-1}$.*

III. Funcţii reale. Funcţia $f\colon A \longrightarrow B$ se numeşte **funcţie de variabilă reală**, dacă $A = D(f) \subseteq \mathbb{R}$. Funcţia de variabilă reală $f\colon A \longrightarrow B$ se numeşte **funcţie reală**, dacă $B \subseteq \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, funcţia $f\colon A \longrightarrow B$ se numeşte **funcţie reală**, dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ şi $B \subseteq \mathbb{R}$. Graficul funcţiei reale $f\colon A \longrightarrow B$ este submulţimea G_f a lui $\mathbb{R}^2$, formată din toate perechile $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $x \in A$ şi $y = f(x)$, adică

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}.$$

Dacă funcţia f este inversabilă, atunci

$$(y,x) \in G_{f^{-1}} \Leftrightarrow (x,y) \in G_f.$$

Tradiţional, în loc de $f^{-1}(y) = x$ se scrie $y = f^{-1}(x)$. Atunci graficul funcţiei inverse f^{-1} este simetric cu graficul funcţiei f în raport cu bisectoarea $y = x$.

Exemplul 8. Pentru funcţia

$$f\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ y = f(x) = x^2,$$

funcţia inversă este

$$f^{-1}\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Graficul funcţiei f este ramura parabolei $y = x^2$ cuprinsă în cadranul I, iar graficul funcţiei f^{-1} este ramura parabolei $x = y^2$ cuprinsă în cadranul I (fig. 2.1).

Operaţii algebrice cu funcţii reale. Fie $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii reale definite pe aceeaşi mulţime D. Considerăm funcţiile:

$s = f + g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $s(x) = f(x) + g(x)$, $(\forall)\ x \in D$;

$s = f + g$ – **funcţia-sumă.**

$p = f \cdot g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $(\forall)\ x \in D$;

$p = f \cdot g$ – **funcţia-produs.**

$d = f - g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $d(x) = f(x) - g(x)$, $(\forall)\ x \in D$;

$d = f - g$ – **funcţia-diferenţă.**

$q = \dfrac{f}{g}\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $(\forall)\ x \in D_1$, unde $D_1 = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$;

$q = \dfrac{f}{g}$ – **funcţia cât.**

$|f|: D \longrightarrow I\!R$, definită prin $|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{dacă } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{dacă } f(x) < 0, \end{cases}$
pentru $(\forall) x \in D$;

$|f|$ – **funcţia modul.**

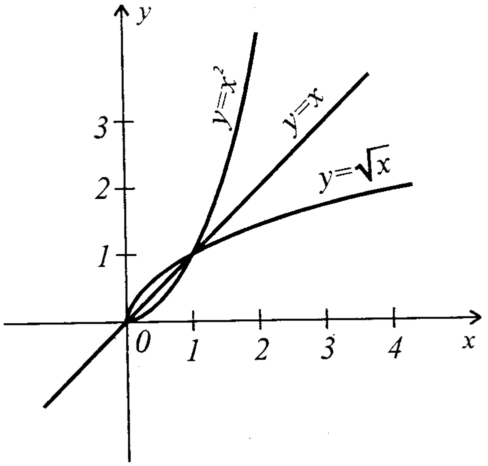


Fig. 2.1

Exemplul 9. Fie f, g: $[0, +\infty) \longrightarrow I\!R$ cu $f(x) = x^2$ şi $g(x) = \sqrt{x}$. Să se determine $f \pm g$, $f \cdot g$ şi f/g.

Soluţie. Deoarece funcţiile f, g au acelaşi domeniu de definiţie, funcţiile $f \pm g$, $f \cdot g$ şi f/g au sens şi

$s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty)$;

$d(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty)$;

$p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty)$;

$q(x) = f(x)/g(x) = x^2/\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, $(\forall)\, x \in D_1 = (0, +\infty)$.

Exemplul 10. Fie f: $I\!R \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ şi g: $[0, +\infty) \longrightarrow I\!R$, $g(x) = \sqrt{x}$. Să se determine a) $g \circ f$ şi b) $f \circ g$.

Soluţie. a) $g \circ f = \varphi$ are sens şi obţinem funcţia φ: $I\!R \longrightarrow I\!R$ cu $\varphi(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(\forall)\, x \in I\!R$.

b) De asemenea are sens $\psi = f \circ g$: $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, cu

$\psi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, $(\forall)\, x \in [0, \infty)$.

2.2. Exerciţii rezolvate

1. Fie $A = \{2,4,6,8\}$ şi $B = \{1,3,5,7\}$, $\alpha \subseteq A \times B, \alpha = \{(x,y) | x \geq 6 \text{ sau } y \leq 1\}$:

a) care este graficul relaţiei α?

b) să se alcătuiască schema relaţiei α.

Soluţie. a) Deoarece $x \in A$, iar $y \in B$, rezultă că

$$x \geq 6 \Leftrightarrow x \in \{6,8\},\ y \leq 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Deci

$\alpha = \{(6,1), (6,3), (6,5), (6,7), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7), (2,1), (4,1)\}$.

b) (Vezi fig. 2.2).

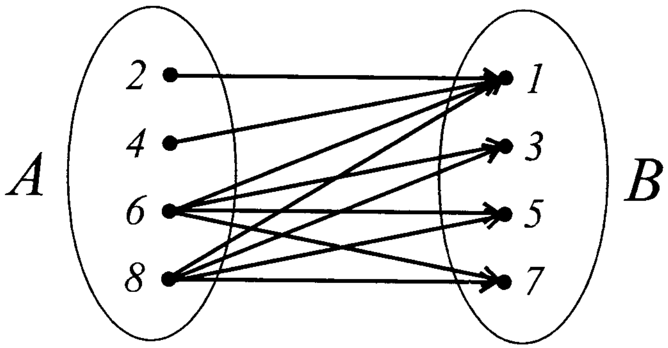


Fig. 2.2

2. Fie $A = \{1,2,3,4\}$ şi $B = \{1,3,5,7,8\}$. Să se scrie graficul relaţiei $\alpha = \{(x,y) | 3x + 4y = 10\} \subseteq A \times B$.

Soluţie. Observăm că $3x + 4y = 10 \Leftrightarrow 3x = 2(5 - 2y) \Rightarrow x$ este par şi $(5 - 2y) \vdots 3$. Ţinând cont de faptul că $x \in A$ şi $y \in B$, obţinem: $x \in \{2,4\}$, $y \in \{1,7\}$. Egalitatea $3x + 4y = 10$ este satisfăcută numai de $x = 2$ şi $y = 1$. Deci $G_\alpha = \{(2,1)\}$.

3. Fie $A = \{1,3,4,5\}$ şi $B = \{1,2,5,6\}$. Să se scrie relaţia α cu ajutorul literelor $x \in A$ şi $y \in B$, dacă se cunoaşte graficul relaţiei α.

$$G_\alpha = \{(1,1), (1,2), (1,5), (1,6), (3,6), (5,5)\}.$$

Soluţie. $(x,y) \in G_\alpha \Leftrightarrow y \vdots x$.

4. Considerăm pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ relaţiile $\alpha, \beta, \gamma, \omega \subseteq \mathbb{N}^2$, definite în felul următor $(x, y \in \mathbb{N})$: $\alpha = \{(3,5), (5,3), (3,3), (5,5)\}$; $x\beta y \Leftrightarrow x \leq y$; $x\gamma y \Leftrightarrow y - x = 12$; $x\omega y \Leftrightarrow x = 3y$.

a) Să se determine δ_α, ρ_α, δ_β, ρ_β, δ_γ, ρ_γ, δ_ω, ρ_ω.

b) Ce proprietăţi posedă fiecare din relaţiile $\alpha, \beta, \gamma, \omega$?

c) Să se determine relaţiile α^{-1}, β^{-1}, γ^{-1} şi ω^{-1}.

d) Să se determine relaţiile $\beta \circ \gamma$, $\gamma \circ \beta$, $\gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$, $(\beta \circ \gamma)^{-1}$, $\gamma \circ \omega$ şi $\omega^{-1} \circ \omega$.

Soluţie. a) 1) $\delta_\alpha = \{3,5\} = \rho_\alpha$.

2) $\delta_\beta=\{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon x\beta y\}=\{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon x \leq y\}=I\!N$ (pentru orice număr natural există numere naturale ce-l întrec).

$\rho_\beta = \{y \in I\!N \mid (\exists)\, x \in I\!N\colon x\beta y\} = \{y \in I\!N\, (\exists)\, x \in I\!N\colon x \leq y\} = I\!N$ (pentru orice număr natural există cel puţin un număr natural ce nu-l întrece).

3) $\delta_\gamma=\{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon x\gamma y\}=\{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon y - x=12\}=$
$= \{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon x = y - 12\} = I\!N$
(de exemplu, $0 = 12 - 12$, $1 = 13 - 12$ etc.).

$\rho_\gamma = \{y \in I\!N \mid (\exists)\, x \in I\!N\colon y = x + 12\} = I\!N \setminus \{0,1,2,\ldots,11\}$ (de exemplu, ecuaţia $2 = x + 12$ nu are soluţii în $I\!N$).

4) $\delta_\omega = \{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon x\omega y\} = \{x \in I\!N \mid (\exists)\, y \in I\!N\colon x =$
$= 3y\} = \{x \in I\!N \mid x \vdots 3\} = \{0,3,6,9,\ldots\} = \{3k \mid k \in I\!N\}$.

$\rho_\omega=\{y \in I\!N \mid (\exists)\, x \in I\!N\colon x=3y\}=\{y \in I\!N \mid (\exists)\, x \in I\!N\colon y=x:3\}=I\!N$ (pentru orice $n \in I\!N$, avem $n = 3n/3$).

b) 1) α este simetrică, tranzitivă, dar nu este reflexivă. De exemplu, $(2,2) \notin \alpha$; **deoarece** $(3,3) \in \alpha$, **rezultă că** α **nu este nici antireflexivă.**

2) β este reflexivă $(x \leq x, (\forall) x \in I\!N)$, antisimetrică $((x\beta y \wedge y\beta x) \Rightarrow (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y)$, tranzitivă $((x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$. Deci β este o relaţie de ordine pe mulţimea $I\!N$.

3) γ este antireflexivă $(x - x \neq 12, (\forall) x \in I\!N)$, antisimetrică $((x\gamma y \wedge y\gamma x) \Rightarrow (y - x = 12$ şi $x - y = 12) \Rightarrow x - y = y - x \Rightarrow x = y)$, dar nu este simetrică $(x\gamma y \Rightarrow y - x = 12 \Rightarrow x - y = -12 \Rightarrow x \not\gamma y)$, nu este tranzitivă $((x\gamma y \wedge y\gamma z) \Rightarrow (y - x = 12 \wedge z - y = 12) \Rightarrow z - x =$
$= 24 \Rightarrow x \not\gamma z)$.

4) ω nu este antireflexivă $(x \neq 3x, (\forall) x \in I\!N^*, 0 = 3 \cdot 0)$, este antisimetrică $((x\omega y \wedge y\omega x) \Rightarrow (x = 3y \wedge y = 3x) \Rightarrow x = 9x \Rightarrow x =$
$= 0 = y$, iar pentru $x \neq 0 \neq y$, egalităţile $x = 3y$ şi $y = 3x$ nu pot avea loc), nu este reflexivă (de exemplu, $1 \neq 3 \cdot 1 \Rightarrow 1 \not\omega 1$), nu este tranzitivă $((x\omega y \wedge y\omega z) \Rightarrow (x = 3y \wedge y = 3z) \Rightarrow x = 9z \neq 3z$, în general $\Rightarrow x \not\omega z)$.

c) 1) $\alpha^{-1} = \{(5,3), (3,5), (3,3), (5,5)\} = \alpha$.

2) $\beta^{-1} = \{(y,x) \in I\!N^2 | (x,y) \in \beta\} = \{(y,x) \in I\!N^2 | x\beta y\} =$
$= \{(y,x) \in I\!N^2 | x \leq y\} = \{(y,x) \in I\!N | y \geq x\}$.

Deci

$$y\beta^{-1}x \Leftrightarrow y \geq x. \tag{1}$$

3) $(y,x) \in \gamma^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \gamma \Leftrightarrow x\gamma y \Leftrightarrow y - x = 12 \Leftrightarrow x = y - 12$, adică

$$y\gamma^{-1}x \Leftrightarrow x = y - 12. \tag{2}$$

4) $(y,x) \in \omega^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \omega \Leftrightarrow x = 3y \Leftrightarrow y = x/3$, adică

$$y\omega^{-1}x \Leftrightarrow y = x/3. \tag{3}$$

d) 1) $(x,y) \in \beta \circ \gamma \Leftrightarrow (\exists) z \in I\!N\colon (x,z) \in \beta \wedge (z,y) \in \gamma \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists) z \in I\!N\colon x \leq z \wedge y - z = 12 \Leftrightarrow (\exists) z \in I\!N\colon x \leq z \wedge z =$
$= y - 12 \Leftrightarrow x \leq y - 12 \Leftrightarrow x + 12 \leq y$,

adică

$$\beta \circ \gamma = \{(x,y) \in I\!N^2 | x + 12 \leq y\}. \tag{4}$$

2) $(x,y) \in \gamma \circ \beta \Leftrightarrow (\exists) z \in I\!N\colon (x,z) \in \gamma \wedge (z,y) \in \beta \Leftrightarrow (\exists) z \in$
$\in I\!N\colon z - x = 12 \wedge z \leq y \Leftrightarrow (\exists) z \in I\!N\colon z = x + 12 \wedge z \leq y \Leftrightarrow x + 12 \leq y$, ceea ce implică

$$\gamma \circ \beta = \{(x,y) \in I\!N^2 | x + 12 \leq y\}.$$

3) $(u,v) \in \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \Leftrightarrow (\exists) w \in I\!N\colon (u,v) \in \gamma^{-1} \wedge (w,v) \in \beta^{-1} \Leftrightarrow$
$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow} (\exists) w \in I\!N\colon w = u - 12 \wedge w \geq v \Leftrightarrow u - 12 \geq v \Leftrightarrow u \geq v + 12$,

adică

$$\gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = \{(u,v) \in I\!N^2 | u \geq v + 12\}. \tag{5}$$

4) $(s,t) \in (\beta \circ \gamma)^{-1} \Leftrightarrow (t,s) \in \beta \circ \gamma \overset{(4)}{\Leftrightarrow} t + 12 \leq s \overset{(5)}{\Leftrightarrow} (s,t) \in \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}$.
Cu alte cuvinte,

$$(\beta \circ \gamma)^{-1} = \gamma^{-1} \circ \beta^{-1}.$$

5) $(x,y) \in \gamma \circ \omega \Leftrightarrow (\exists) z \in I\!N\colon (x,z) \in \gamma \wedge (z,y) \in \omega \Leftrightarrow (\exists) z \in$
$\in I\!N\colon z - x = 12 \wedge z = 3y \Leftrightarrow (\exists) z \in N\colon z = x + 12 \wedge z = 3y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 12 = 3y$, ceea ce implică

$$\gamma \circ \omega = \{(x,y) \in I\!N^2 | x + 12 = 3y\}.$$

6) $(u,v) \in \omega^{-1} \circ \omega \Leftrightarrow (\exists) w \in I\!N\colon (u,w) \in \omega^{-1} \wedge (w,v) \in \omega \Leftrightarrow$
$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} (\exists) w \in I\!N\colon u = w/3 \wedge w = 3v \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow (u,v) \in 1_{I\!N}$,

ceea ce implică

$$\omega^{-1} \circ \omega = 1_{N}.$$

5. Considerăm relaţia binară definită pe $\mathbb{R}$ în felul următor

$$x \alpha y \Leftrightarrow (x = y \lor x + y = 2).$$

a) Să se demonstreze că α este relaţie de echivalenţă.

b) Să se determine mulţimea factor $\mathbb{R}/\alpha$.

Soluţie. a) 1) Deoarece $x = x$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$, avem $x \alpha x$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

2) $a \alpha b \Rightarrow (a = b \lor a + b = 2) \Rightarrow (b = a \lor b + a = 2) \Rightarrow b \alpha a$.

3) Fie $a \alpha b$ şi $b \alpha c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Atunci

$$(a \alpha b \land b \alpha c) \Rightarrow ((a = b \lor a + b = 2) \land (b = c \lor b + c = 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((a = b \land b = c) \lor (a = b \land b+c = 2) \lor (a+b = 2 \land b = c) \lor (a+b =$$
$$= 2 \land b + c = 2)) \Rightarrow (a = c \lor a + c = 2) \Rightarrow a \alpha c.$$

Cu alte cuvinte, relaţia binară α este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, ceea ce demonstrează că α este relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$.

b) Fie $a \in \mathbb{R}$. Determinăm clasa α_a de echivalenţă a lui a în raport cu α.

$$\alpha_a = \{x \in \mathbb{R} | x \alpha a\} = \{x \in \mathbb{R} | x = a \lor x + a = 2\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} | x = a \lor x = 2 - a\} = \{a, 2 - a\}.$$

Atunci mulţimea factor este

$$\mathbb{R}/\alpha = \{\alpha_x | x \in \mathbb{R}\} = \{\{x, 2 - x\} | x \in \mathbb{R}\}.$$

Observăm că

$|\alpha_a| = 1 \Leftrightarrow a = 1$; $|\alpha_a| = 2 \Leftrightarrow a \neq 1$; $(a \neq b \Rightarrow (\alpha_a = \alpha_b \Leftrightarrow a+b = 2))$.

Cu alte cuvinte, pentru $a \neq 1$, avem $a \neq 2 - a$ şi de aceea $\alpha_a = \alpha_{2-a}$, iar mulţimea factor mai poate fi scrisă

$$\mathbb{R}/\alpha = \{\alpha_a | a \in \mathbb{R}, a \geq 1\} = \{\{a, 2 - a\} | a \geq 1\}.$$

6. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $B = \{a, b, c, d, e\}$. Care din diagramele din fig. 2.3 reprezintă o funcţie definită pe A cu valori în B şi care nu?

Soluţie. Prin diagramele a), c), e) sunt date funcţiile definite pe A cu valori în B. Diagrama b) nu reprezintă o funcţie definită pe A cu valori în B, deoarece nu este indicată imaginea lui 2. Diagrama d) de asemenea nu defineşte o funcţie pe A cu valori în B, deoarece lui 1 îi corespund două elemente din B, anume a, d.

7. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{a, b\}$. Să se scrie toate funcţiile definite pe A cu valori în B, indicându-se diagrama respectivă.

Soluţie. Există opt funcţii definite pe A cu valori în B. Diagramele lor sunt reprezentate în fig. 2.4.

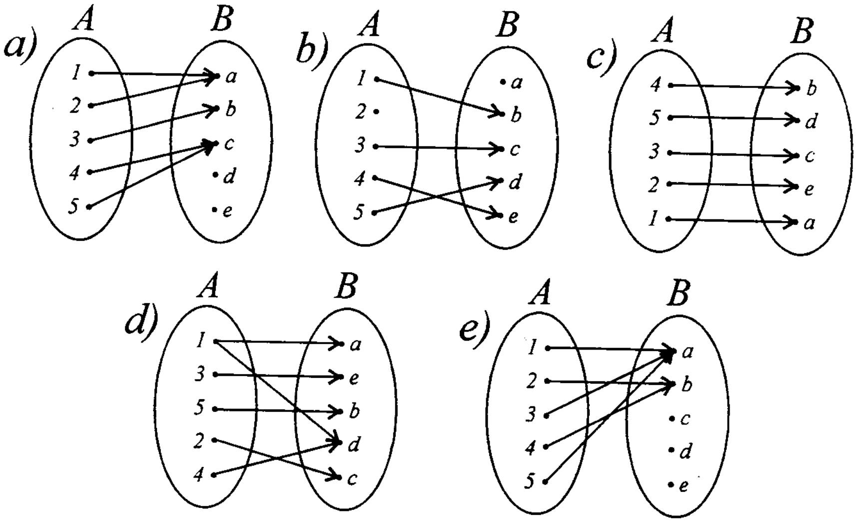


Fig. 2.3

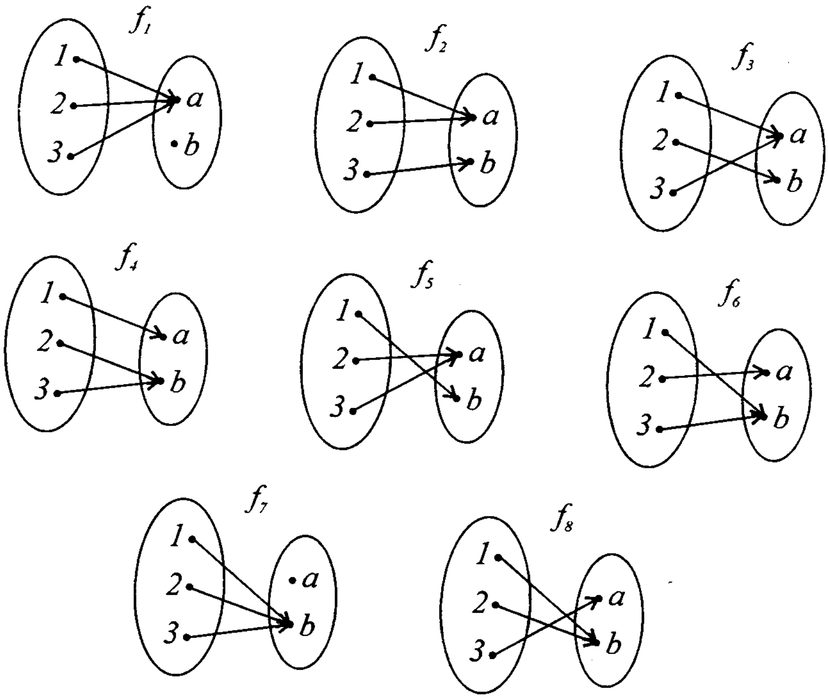


Fig. 2.4

8. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z, t\}$ şi $D = \{1, 2\}$.

a) Să se facă diagramele respective pentru două funcţii surjective definite pe A cu valori în B.

b) Să se facă diagrama funcţiilor injective definite pe D cu valori în B.

c) Să se facă diagrama unei funcţii definite pe B cu valori în C, care nu este injectivă.

d) Să se facă diagramele respective a două funcţii bijective definite pe A cu valori în C.

Soluție. a) Diagramele a două funcţii surjective şi două funcţii nesurjective definite pe A cu valori în B sunt reprezentate în fig. 2.5 a) şi b).

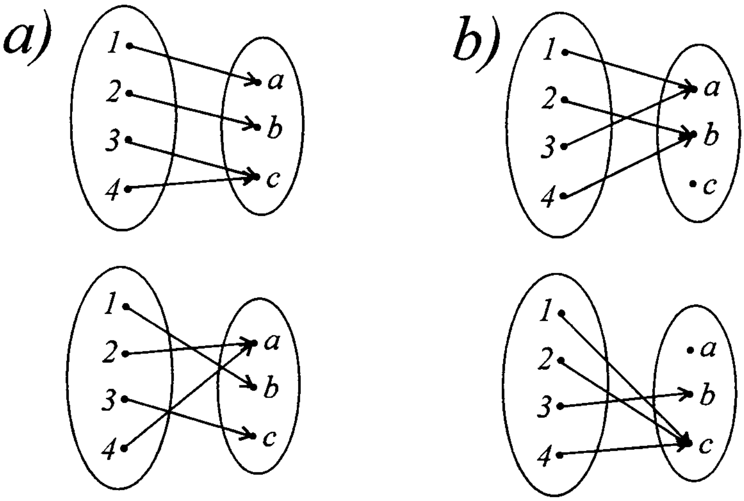


Fig. 2.5

b) Diagrama funcţiilor injective definite pe D cu valori în B sunt reprezentate în fig. 2.6.

c) Diagrama unei funcţii neinjective definite pe B cu valori în C este reprezentată în fig. 2.7.

d) Diagramele a două funcţii bijective definite pe A cu valori în C sunt reprezentate în fig. 2.8.

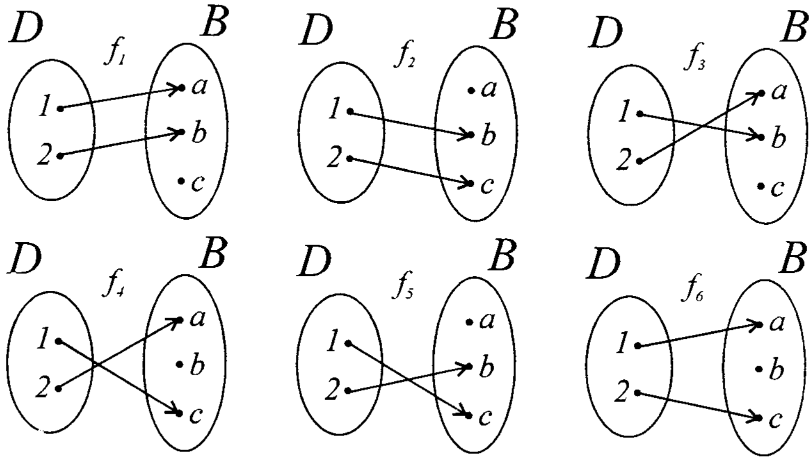


Fig. 2.6

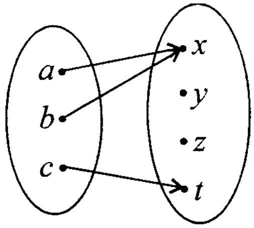


Fig. 2.7

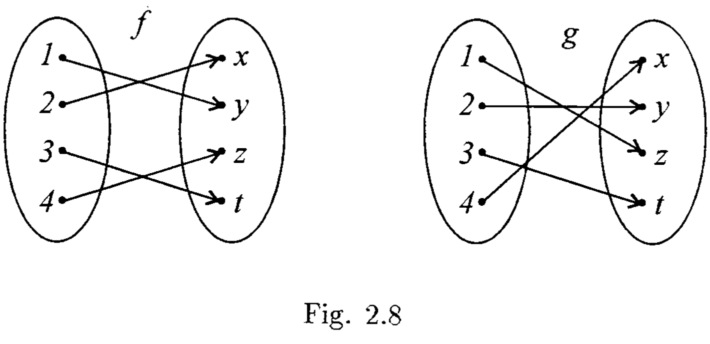


Fig. 2.8

9. Fie $A = \{0, 1, 5, 6\}$, $B = \{0, 3, 8, 15\}$ şi funcţia $f\colon A \longrightarrow B$. definită de egalitatea $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $(\forall)\ x \in A$.

a) Este funcţia f surjectivă?

b) Este f injectivă?

c) Este f bijectivă?

Soluție. a) Calculăm $f(A) = \{f(0), f(1), f(5), f(6)\} = \{3, 0, 8, 15\} = B$. Deci f este surjectivă.

b) Funcţia f este şi injectivă, fiindcă $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(5) = 8$ şi $f(6) = 15$, adică $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) Funcţia f este bijectivă.

10. Utilizându-se graficul funcţiei $f\colon A \longrightarrow B$, $f\colon I\!R \longrightarrow I\!R$, să se arate că funcţia f este injectivă, surjectivă sau bijectivă.

a) $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2), \\ 3x-6, & \text{dacă } x \in [2, +\infty). \end{cases}$

b) $f\colon [1;5] \longrightarrow [-1;3]$, $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$.

c) $f\colon [-1, +\infty] \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{dacă } -1 < x \leq 0, \\ -x, & \text{dacă } 0 < x \leq 1, \\ -0.5(x+1), & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

d) $f\colon I\!R \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \max(x+1, 1-x)$.

Soluție. Dacă oricare paralelă la axa absciselor taie graficul funcţiei în cel mult un punct (adică îl taie într-un singur punct sau nu-l taie deloc), atunci funcţia este injectivă. Dacă există o paralelă la axa absciselor care intersectează graficul funcţiei în două sau mai multe puncte, funcţia nu este injectivă. Dacă $E(f)$ este mulţimea valorilor funcţiei f şi orice paralelă la axa absciselor, dusă prin punctele axei ordonatelor ce se conţin în $E(f)$, taie graficul funcţiei f cel puţin într-un punct, funcţia este surjectivă. Rezultă că o funcţie f este bijectivă, dacă oricare paralelă la axa absciselor, dusă prin punctele lui $E(f)$, intersectează graficul lui f într-un singur punct.

a) Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 2.9.

Avem $E(f) = (-\infty, +\infty)$ şi orice paralelă $y = m$, $m \in I\!R$, la axa absciselor intersectează graficul funcţiei f într-un singur punct. Deci f este funcţie bijectivă.

b) Observăm că $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [1;5]$. Explicit, funcţia $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{dacă } x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{dacă } x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{dacă } x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty), \\ -x^2 + 6x - 8, & \text{dacă } x \in (2, 4). \end{cases}$$

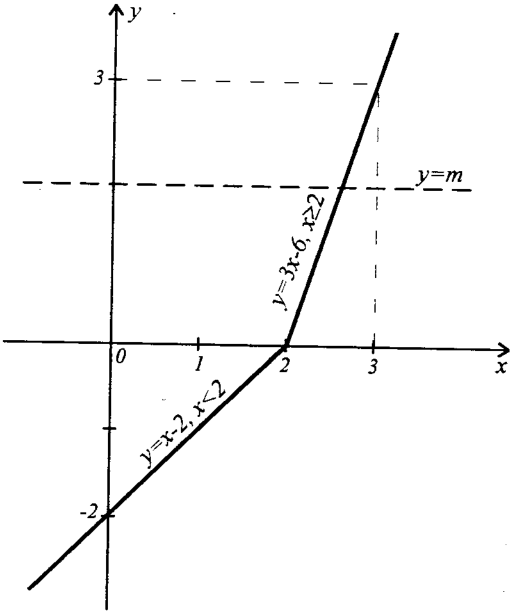


Fig. 2.9

Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 2.10.

Avem $E(f) = [0;3] \subset [-1;3]$. Orice paralelă $y = m$, $m \in (0,1)$, intersectează graficul funcţiei f în patru puncte; paralela $y = 1$ intersectează graficul în trei puncte; orice paralelă $y = m$, $m \in (1;3]$, intersectează graficul lui f în două puncte. Deci funcţia f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

c) Graficul funcţiei este reprezentat în fig. 2.11. Avem

$$D(f) = [-1, +\infty), \ E(f) = (-\infty, 3].$$

Orice paralelă $y = m$ la axa absciselor taie graficul funcţiei $f(x)$ în cel mult un punct ($y = -3, y = 2, y = 4$) şi de aceea $f(x)$ este injectivă. Ecuaţia $f(x) = r \in I\!R$ are soluţie numai pentru $r \leq 3$, deci $f(x)$ nu este funcţie surjectivă.

d) Explicităm funcţia f:

$$f(x) = \max(x+1, 1-x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } 1-x \leq x+1, \\ 1-x, & \text{dacă } x+1 < 1-x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \geq 0, \\ 1-x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

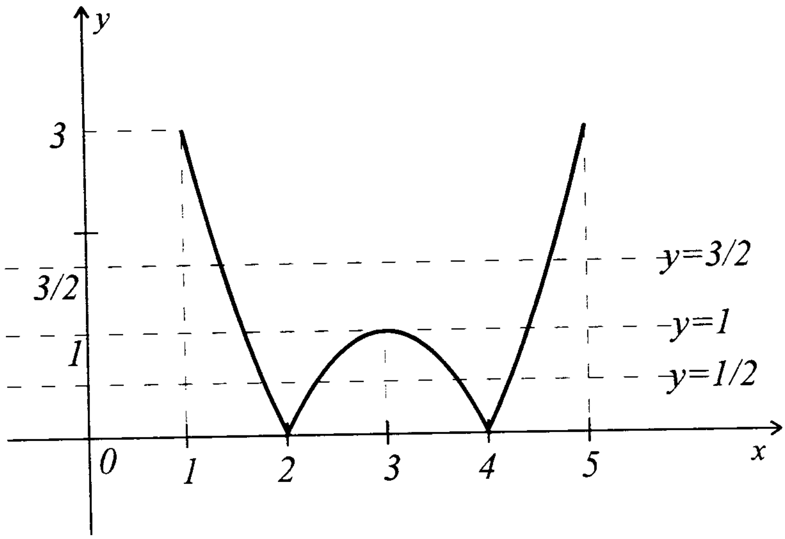


Fig. 2.10

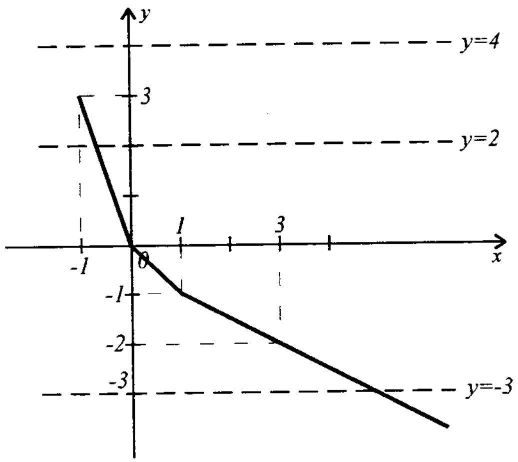


Fig. 2.11

Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 2.12.

Avem $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [1, +\infty)$. Orice paralelă $y = m$, $m \in \in (1, +\infty)$, intersectează graficul în două puncte şi de aceea f nu este injectivă. Dreapta $y = 1/2 \in [0, +\infty)$ nu intersectează graficul funcţiei f, deci f nu este nici surjectivă.

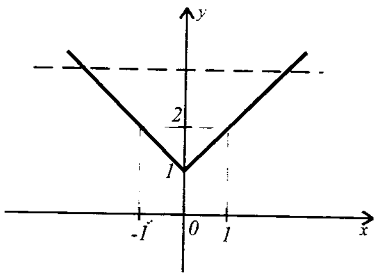


Fig. 2.12

11. Să se determine care din următoarele relaţii sunt aplicaţii; care din aplicaţii sunt injective, surjective, bijective?

a) $\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x - y = 3\}$;

b) $f = \{(x, y) \in [-1; 0] \times [-1; 1] | x^2 + y^2 = 1\}$;

c) $g = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) | y = x^2\}$;

d) $\psi = \{(x, y) \in [0, +\infty)^2 | y = x^2\}$.

Pentru funcţia bijectivă să se indice inversa ei.

Soluţie. a) $(x, y) \in \varphi \Leftrightarrow x - y = 3 \Leftrightarrow x = y + 3$. Deoarece

$$D(\varphi) = \delta_\varphi = \{x \in \mathbb{N} | (\exists) y \in \mathbb{N}: x = y + 3\} \neq \mathbb{N}$$

(ecuaţia $2 = y + 3$ nu are soluţii în $\mathbb{N}$), rezultă că φ nu este relaţie funcţională.

b) $(x, y) \in f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Atunci, deoarece $D(f) = \delta_f = = [-1; 0]$, iar

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1, \\ \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in f, \\ \\ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in f \end{array}\right.$$

cu $\sqrt{3}/2 \neq -\sqrt{3}/2$, şi f nu este relaţie funcţională.

c) Avem: $(x, y) \in g \Leftrightarrow xgy \Leftrightarrow y = g(x) = x^2$. Atunci:

1) $x \in [0, +\infty) \Rightarrow y = x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, x^2) \in g$;

2) $(xgy_1 \wedge xgy_2) \Rightarrow y_1 = x^2 = y_2$;

3) $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$, deoarece $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$;

4) ecuaţia $g(x) = r \in I\!R$ are soluţii în $[0, +\infty)$, dacă şi numai dacă $r \geq 0$, ceea ce demonstrează că g nu este surjecţie (numărul -2, de exemplu, nu are preimagine în $[0, +\infty)$).

d) Avem: $(x, y) \in \psi \Leftrightarrow x\psi y \Leftrightarrow y = \psi(x) = x^2$. Repetând raţionamentele din p. c), obţinem că ψ este injecţie. Mai mult, ecuaţia $\psi(x) = r \in [0, +\infty)$ are soluţia $x = \sqrt{r} \in [0, +\infty)$ şi de aceea ψ este aplicaţie surjectivă. Atunci ψ este aplicaţie bijectivă şi, în conformitate cu teorema 6, relaţia ψ^{-1} este de asemenea aplicaţie (funcţie).

În conformitate cu aceeaşi teoremă 6, avem

$$\psi^{-1}(x) = \sqrt{x}, \; x \in [0, +\infty).$$

12. Fie $\{A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi $\varphi \in F(A)$ dată cu ajutorul tabelului

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(x)$	2	2	1	3	4	5	3	2	1

a) Să se determine $\varphi(\{2, 3, 5\})$; $\varphi(\{1, 3, 7, 9\})$; $\mathcal{I}m\varphi$.

b) Să se determine $\varphi^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$; $\varphi^{-1}(\{2, 3\})$; $\varphi^{-1}(\{7, 8, 9\})$.

c) Să se calculeze $\varphi^{-1}(1)$; $\varphi^{-1}(4)$; $\varphi^{-1}(7)$.

Soluţie. a) $\varphi(\{2, 3, 5\}) = \{\varphi(2), \varphi(3), \varphi(5)\} = \{2, 1, 4\}$;
$\varphi(\{1, 3, 7, 9\}) = \{\varphi(1), \varphi(3), \varphi(7), \varphi(9)\} = \{2, 1, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$;
$\mathcal{I}m\varphi = \varphi(A) = \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6), \varphi(7), \varphi(8), \varphi(9)\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) $\varphi^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{y \in A | \varphi(y) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = A$;
$\varphi^{-1}(\{2, 3\}) = \{a \in A | \varphi(a) \in \{2, 3\}\} = \{1, 2, 4, 7, 8\}$;
$\varphi^{-1}(\{7, 8, 9\}) = \{b \in A | \varphi(b) \in \{7, 8, 9\}\} = \varnothing$.

c) $\varphi^{-1}(1) = \{a \in A | \varphi(a) = 1\} = \{3, 9\}$;
$\varphi^{-1}(4) = \{b \in A | \varphi(b) = 4\} = \{5\}$;
$\varphi^{-1}(7) = \{c \in A | \varphi(c) = 7\} = \varnothing$.

13. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{a, b, c\}$. Examinăm relaţiile
$\alpha = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, c)\}, \beta = \{(1, b), (2, a), (3, c)\}$,
$\gamma = \{(2, a), (3, c), (1, c)\}$.

a) Să se determine $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$ şi $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$.

b) Care din relaţiile α, β şi γ sunt aplicaţii? Indicaţi tipul aplicaţiei.

c) Determinaţi relaţiile α^{-1}, β^{-1} şi γ^{-1}. Care din ele este funcţie?

d) Determinaţi relaţiile $\alpha \circ \beta^{-1}$, $\beta \circ \alpha^{-1}$, $\alpha \circ \gamma^{-1}$, $\gamma \circ \alpha^{-1}$, $\beta \circ \gamma^{-1}$ şi $\gamma \circ \beta^{-1}$. Care din ele sunt aplicaţii?

Soluție. a) $\delta_\alpha = \{1,2,3\} = A = \delta_\beta = \delta_\gamma$; $\rho_\alpha = \{a,b,c\} = B = \rho_\beta$; $\rho_\gamma = \{a,c\}$.

b) α nu este aplicaţie, deoarece elementul 3 are două imagini a şi c. β este aplicaţie bijectivă; γ este aplicaţie, nici injectivă (elementele $3 \neq 1$ au aceeaşi imagine c), nici surjectivă (b nu are preimagine).

c) $\alpha^{-1} = \{(a,1),(b,2),(a,3),(c,3)\}$, $\beta^{-1} = \{(b,1),(a,2),(c,3)\}$, $\gamma^{-1} = \{(a,2),(c,3),(c,1)\}$.

Avem $\delta_{\alpha^{-1}} = B = \delta_{\beta^{-1}}$, $\delta_{\gamma^{-1}} = \{a,c\} \neq B$, $\rho_{\alpha^{-1}} = A = \rho_{\beta^{-1}} = \rho_{\gamma^{-1}}$. α^{-1} nu este aplicaţie, fiindcă elementul a are două imagini 1 şi 3; β^{-1} este aplicaţie bijectivă; γ^{-1} nu este aplicaţie, fiindcă $\delta_{\gamma^{-1}} \neq B$ (elementul b nu are imagine);

d) $\alpha \circ \beta^{-1} = \{(1,2),(2,1),(3,2),(3,3)\}$;
$\beta \circ \alpha^{-1} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,3)\}$;
$\alpha \circ \gamma^{-1} = \{(1,2),(3,2),(3,3),(3,1)\}$;
$\gamma \circ \alpha^{-1} = \{(2,1),(3,3),(1,3),(2,3)\}$;
$\beta \circ \gamma^{-1} = \{(2,2),(3,3),(3,1)\}$;
$\gamma \circ \beta^{-1} = \{(2,2),(3,3),(1,3)\}$.

Este aplicaţie numai relaţia $\gamma \circ \beta^{-1}$, nici injectivă, nici surjectivă.

14. Se dau funcţiile: $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x \leq 2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2, \end{cases} \qquad g(x) = \max(x-1, 3-x).$$

Să se arate că $f = g$.

Soluție. Funcţiile f şi g sunt definite pe $\mathbb{R}$ şi au valori în $\mathbb{R}$. Să arătăm că $f(x) = g(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Explicităm funcţia g:

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x - 1 \leq 3 - x, \\ x - 1, & \text{dacă } 3 - x < x - 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x \leq 2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} = f(x)$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Deci $f = g$.

15. Fiind date funcţiile $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x \leq 2, \\ \dfrac{x+10}{3}, & \text{dacă } x > 2, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x < 3, \\ 2x - 5, & \text{dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

a) Să se arate că f şi g sunt funcţii bijective.

b) Să se reprezinte grafic funcţiile f şi f^{-1} în acelaşi reper de coordonate.

c) Să se determine funcţiile: $s = f+g$, $d = f-g$, $p = f\cdot g$, $q = f/g$.

d) Funcţia d este oare bijectivă?

Soluţie. a), b) Graficul funcţiei f este reprezentat în fig. 2.13 cu o linie continuă, iar graficul lui f^{-1} este reprezentat printr-o linie întreruptă.

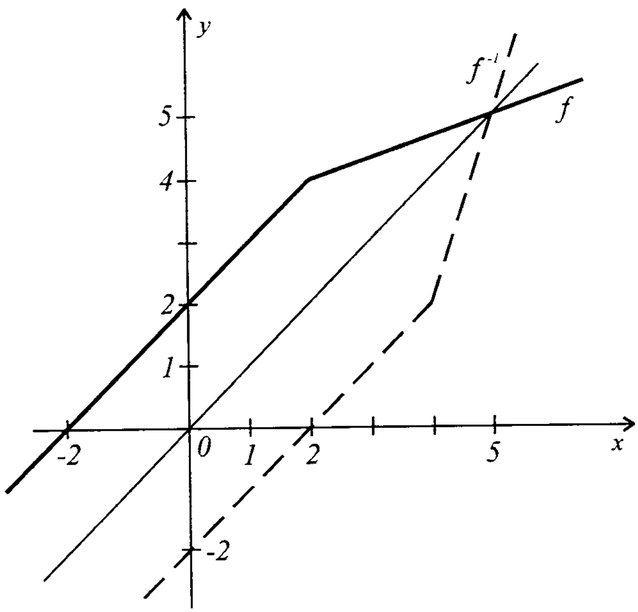


Fig. 2.13

Avem $g^{-1}, f^{-1}\colon I\!R \longrightarrow I\!R$,

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x-2, & \text{dacă } x \leq 4, \\ 3x-10, & \text{dacă } x > 4; \end{cases} \qquad g^{-1}(x)=\begin{cases} x+2, & \text{dacă } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x+5), & \text{dacă } x \geq 1. \end{cases}$$

c) Compunem tabloul următor:

x	$(-\infty, 2]$	(2,3)	$[3, +\infty)$
f	$x+2$	$(x+10)/3$	$(x+10)/3$
g	$x-2$	$x-2$	$2x-5$
$f+g$	$2x$	$4(x+1)/3$	$(7x-5)/3$
$f-g$	4	$(16-2x)/3$	$(25-5x)/3$
$f \cdot g$	x^2-4	$(x^2+8x-20)/3$	$(2x^2+15x-50)/3$
f/g	$\frac{x+2}{x-2}$, $x \neq 2$	$\frac{x+10}{3(x-2)}$	$\frac{x+10}{3(2x-5)}$

Avem

$$s(x) = \begin{cases} 2x, \text{ dacă } x \leq 2, \\ \frac{4}{3}(x+1), \text{ dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{1}{3}(7x-5), \text{ dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

$$d(x) = \begin{cases} 4, \text{ dacă } x \leq 2, \\ \frac{2}{3}(8-x), \text{ dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{5}{3}(5-x), \text{ dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} x^2-4, \text{ dacă } x \leq 2, \\ \frac{1}{3}(x^2+8x-20), \text{ dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{1}{3}(2x^2+15x-50), \text{ dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2}, \text{ dacă } x \leq 2, \\ \frac{x+10}{3(x-2)}, \text{ dacă } 2 < x < 3, \\ \frac{x+10}{3(2x-5)}, \text{ dacă } x \geq 3. \end{cases}$$

d) Avem $d(x) = 4$, $(\forall) x \in (-\infty, 2]$, şi de aceea d nu este injectivă, adică d nu este bijectivă. Aceasta ne demonstrează că diferenţa (suma) a două funcţii bijective nu este neapărat o funcţie bijectivă.

16. Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$,
$f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$.

a) Să se arate că funcţia f este inversabilă.

b) Să se determine f^{-1}.

c) În ce caz avem $f = f^{-1}$?

Soluție. a) 1) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{ax_1+b}{cx_1+d} = \dfrac{ax_2+b}{cx_2+d} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd = acx_1x_2 + bcx_1 + adx_2 + bd \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow adx_1 + bcx_2 = adx_2 + bcx_1 \Leftrightarrow ad(x_1 - x_2) - bc(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ad - bc)(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă.

2) Fie $r \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. Examinăm ecuaţia $f(x) = r$. Atunci

$$f(x) = r \Leftrightarrow (ax+b)/(cx+d) = r \Leftrightarrow ax + b = crx + dr \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a - cr)x = dr - b \overset{r\neq\frac{a}{c}}{\Longleftrightarrow} x = (dr-b)/(a-cr).$$

Dacă $x = (dr-b)/(a-cr) = -d/c \Leftrightarrow cdr - bc = -ad + cdr \Leftrightarrow ad - bc = 0$. Imposibil. Deci $(dr-b)/(a-cr) \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, ceea ce demonstrează că ecuaţia $f(x) = r$ are soluţii în $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ pentru orice $r \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. Aceasta ne demonstrează că f este funcţie surjectivă.

Din 1) – 2) rezultă că f este funcţie bijectivă, deci şi inversabilă.

b) Determinăm $f^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow (cf(x) - a)x = b - df(x) \overset{f(x)\neq\frac{a}{c}}{\Longleftrightarrow} x = \frac{-df(x)+b}{cf(x)-a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}.$$

c) Pentru a avea $f = f^{-1}$, este necesar ca funcţiile f şi f^{-1} să aibă acelaşi domeniu de definiţie şi deci $d = -a$. Această condiţie este şi suficientă pentru egalitatea funcţiilor f şi f^{-1}. În adevăr, dacă $d = -a$, funcţiile f şi f^{-1} sunt definite pe $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, iau valori în $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ şi $f^{-1}(x) = (ax+b)/(cx+d) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$, adică $f^{-1} = f$.

17. Să se reprezinte funcţia $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 8}$ ca o compoziţie a două funcţii.

Soluție. Punem $u(x) = x^2 - 2x + 8$ şi $v(x) = \sqrt{x}$. Atunci $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x + 8} = v(5x^2 - 2x + 8) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.

Răspuns: $f(x) = (v \circ u)(x)$ cu $u(x) = 5x^2 - 2x + 8$, $v(x) = \sqrt{x}$.

18. Să se calculeze $f \circ g$, $g \circ f$, $(f \circ g)(4)$ şi $(g \circ f)(4)$, unde:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ şi $g(x) = \sqrt{x}$;

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$ şi $g(x) = x^2 - 4$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+6x, & \text{dacă } x < -3, \\ -2x-5, & \text{dacă } x \geq -3 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} 5x-2, & \text{dacă } x \leq 1, \\ x^2-2x+4, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Indicaţi $D(f \circ g)$ şi $D(g \circ f)$.

Soluție. a) Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \dfrac{3}{\sqrt{x}-1}$;

$$(f\circ g)(4)=\frac{3}{\sqrt{4}-1}=3;\ D(f\circ g)=[0;1)\cup(1,+\infty).$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{3}{x-1}\right)=\sqrt{\frac{3}{x-1}};\ (g\circ f)(4)=\sqrt{\frac{3}{4-1}}=1;$$

$$D(g\circ f)=(1,+\infty).$$

Deci $(g\circ f)(4)\neq(f\circ g)(4)$, ceea ce demonstrează că legea comutativă a compunerii funcţiilor, în general, nu are loc: $f\circ g\neq g\circ f$.

b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{(x^2-4)+3}=\sqrt{x^2-1}$;

$x\in D(f\circ g)\Leftrightarrow x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)=D(f\circ g)$.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+3})=(\sqrt{x+3})^2-4=x-1$; $D(g\circ f)=\mathbb{R}$.

$$(f\circ g)(4)=\sqrt{4^2-1}=\sqrt{15},\ (g\circ f)(4)=4-1=3.$$

c) Pentru a determina funcţiile $f\circ g$ şi $g\circ f$, în acest caz procedăm în modul următor:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} g^2(x)+6g(x), & \text{dacă } g(x)<-3,\\ -2g(x)-5, & \text{dacă } g(x)\geq-3\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} g^2(x)+6g(x), & \text{dacă } g(x)<-3,\\ -2g(x)-5, & \text{dacă } g(x)\geq-3 \text{ şi } x\leq 1,\\ -2(x^2-2x+4)-5, & \text{dacă } g(x)\geq-3 \text{ şi } x>1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} (5x-2)^2+6(5x-2), & \text{dacă } 5x-2<-3,\\ -2(5x-2)-5, & \text{dacă } 5x-2\geq-3 \text{ şi } x\leq 1,\\ -2(x^2-2x+4)-5, & \text{dacă } 5x-2\geq-3 \text{ şi } x>1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 25x^2+10x-8, & \text{dacă } x<-1/5,\\ -10x-1, & \text{dacă } -1/5\leq x\leq 1,\\ -2x^2+4x-13, & \text{dacă } x>1.\end{cases}$$

$$(f\circ g)(4)=-2\cdot 4^2+4\cdot 4-13=-29.$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} 5f(x)-2, & \text{dacă } f(x)\leq 1,\\ f^2(x)-2f(x)+4, & \text{dacă } f(x)>1.\end{cases}$$

Observăm că

$$f(x)\leq 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+6x\leq 1,\\ x<-3\end{cases}\\ \begin{cases}-2x-5\leq 1,\\ x\geq -3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-3-\sqrt{10},-3+\sqrt{10}],\\ x<-3\end{cases}\\ \begin{cases}-2x\leq 6,\\ x\geq -3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in[-3-\sqrt{10};-3),\\ x\geq-3\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in[-3-\sqrt{10};-3)\cup[-3,+\infty).$$

Deci pentru $f(x)\leq 1$, obţinem

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 5(x^2+6x)-2, & \text{dacă } x\in[-3-\sqrt{10},-3)\\ 5(-2x-5)-2, & \text{dacă } x\in[-3,+\infty).\end{cases}$$

În mod analog,

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^2+6x>1, \\ x<-3 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x-5>1, \\ x\ge -3 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x\in(-\infty,-3-\sqrt{10}), \\ x\in\varnothing \end{cases}\right.$$

şi de aceea pentru $f(x) > 1$, obţinem

$(g \circ f)(x) = (x^2+6x)^2 - 2(x^2+6x) + 4 = x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 12x + 4$ pentru $x \in (-\infty, -3-\sqrt{10})$.

Totalizând, avem

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} x^4+12x^3+34x^2-12x+4, \text{ dacă } x\in(-\infty,-3-\sqrt{10}), \\ 5x^2+30x-2, \text{ dacă } x\in[-3-\sqrt{10},-3), \\ -10x-7, \text{ dacă } x\ge -3. \end{cases}$$

$$(g\circ f)(4) = -10\cdot 4 - 27 = -67.$$

19. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $(g\circ f\circ f)(x) = (f\circ g\circ g)(x)$, dacă $f(x) = 3x+1$, $g(x) = x+3$;

b) $(f\circ f\circ f)(x) = x$, dacă $f(x) = \dfrac{ax+1}{x+a}$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-a\}$;

c) $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$, dacă $f(x) = 2x^2-1$, $g(x) = 4x^3-3x$.

Soluţie. a) Determinăm funcţiile $(g\circ f\circ f)(x)$ şi $(f\circ g\circ g)(x)$:

$$(g\circ f\circ f)(x) = g(f(f(x))) = g(f(3x+1)) = g(3(3x+1)+1) = \\ = g(9x+4) = 9x+4+3 = 9x+7;$$

$$(f\circ g\circ g)(x) = f(g(g(x))) = f(g(x+3)) = f((x+3)+3) = \\ = f(x+6) = 3(x+6)+1 = 3x+19.$$

Ecuaţia devine

$$9x+7 = 3x+19 \Leftrightarrow x = 2.$$

Răspuns: $x = 2$.

b) Calculăm $(f\circ f\circ f)(x)$:

$$(f\circ f\circ f)(x) = f(f(f(x))) = f\left(f\left(\frac{ax+1}{x+a}\right)\right) =$$

$$= f\left(\frac{a\cdot\dfrac{ax+1}{x+a}+1}{\dfrac{ax+1}{x+a}+a}\right) = f\left(\frac{ax^2+x+2a}{2ax+1+a^2}\right) =$$

$$= \frac{a\cdot\dfrac{a^2x+x+2a}{2ax+1+a^2}+1}{\dfrac{a^2x+x+2a}{2ax+1+a^2}+a} = \frac{a^3x+3ax+3a^2+1}{3a^2x+x+3a+a^3} =$$

$$= ((a^3+3a)x+(3a^2+1))/((3a^2+1)x+(a^3+3a)).$$

Ecuaţia devine

$$\frac{(a^3+3a)x+(3a^2+1)}{(3a^2+1)x+(a^3+3a)} = x \Leftrightarrow (3a^2+1)x^2 = 3a^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Răspuns: $x \in \{-1, 1\}$.

c) Determinăm $(f \circ g)(x)$ şi $(g \circ f)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x^3-3x) = 2(4x^3-3x)^2 - 1 =$$
$$= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2-1) = 4(2x^2-1)^3 - 3(2x^2-1) =$$
$$= 4(8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1) - 6x^2 + 3 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Ecuaţia devine

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

adică egalitatea este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Răspuns: $x \in \mathbb{R}$.

20. Fie $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ date de $f(x) = x^2 + x + 12$ şi $g(x) = x^2 - x + 2$. Să se arate că nu există nici o funcţie $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$(\varphi \circ f)(x) + (\varphi \circ g)(x) = (g \circ f)(x),\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}. \qquad (A)$$

Soluţie. Relaţia (A) mai poate fi scrisă

$$\varphi(x^2+x+2) + \varphi(x^2-x+2) = (x^2+x+2)^2 - (x^2+x+2) + 2. \quad (A')$$

Presupunem că există o funcţie $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ce satisface relaţia (A'). Punem în (A') $x = 1$ şi $x = -1$. Obţinem:

$$\varphi(4) + \varphi(2) = 14, \quad \varphi(2) + \varphi(4) = 4,$$

ceea ce implică $\varphi(4) + \varphi(2) \neq \varphi(2) + \varphi(4)$, contradicţie cu ipoteza. Deci nu există o funcţie φ cu proprietatea din enunţ.

21. Să se determine toate valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^2 - x$ şi $g(x) = x^2 + ax + b$.

Soluţie. Determinăm $f \circ g$ şi $g \circ f$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+ax+b) = (x^2+ax+b)^2 - (x^2+ax+b) =$$
$$= x^4 + 2ax^3 + (2b-1)x^2 + a^2x^2 + b^2 - ax - b + 2abx =$$
$$= x^4 + 2ax^3 + (a^2+2b-1)x^2 + (2ab-a)x + b^2 - b.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 + a(x^2 - x) + b =$$
$$= x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax + b.$$

Atunci

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x),\ (\forall)\ x \in R \Leftrightarrow x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b - 1)x^2 +$$
$$+(2ab - a)x + b^2 - b = x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax + b \Leftrightarrow$$

$$\overset{(\forall)x \in R}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2a = -2, \\ a^2 + 2b - 1 = a + 1, \\ 2ab - a = -a, \\ b = b^2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 0. \end{cases}$$

Răspuns: $a = -1$, $b = 0$, $g(x) = x^2 - x = f(x)$.

22. Sunt date funcţiile $f, g, h\colon I\!R \longrightarrow I\!R$,

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3,\ g(x) = x^3 + x + 3 \text{ şi } h(x) = x^3 + 8.$$

Să se arate că:

a) f nu este injectivă;

b) g este ingectivă;

c) h este bijectivă şi să se determine h^{-1}.

Soluţie. a) Fie $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci

$$x_1^4 + 4x_1^3 + 3 = x_2^4 + 4x_2^3 + 3 \Leftrightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 - x_2)\times$$
$$\times(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \not\Rightarrow x_1 = x_2.$$

De exemplu, $f(x) = x^3(x+4) + 3$, luând $x_1 = 0$ şi $x_2 = -4$, obţinem $f(0) = f(-4) = 3$, $x_1 \neq x_2$.

b) $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + x_1 + 3 = x_2^3 + x_2 + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

deoarece

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 > 0,\ (\forall)\ x_1, x_2 \in I\!R.$$

c) $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + 8 = x_2^3 + 8 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, adică h este funcţie injectivă.

Demonstrăm că h este surjectivă. Fie $r \in I\!R$. Rezolvăm ecuaţia $h(x) = r \Leftrightarrow x^3 + 8 = r \Leftrightarrow x^3 = r - 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{r-8}$ (rădăcina de ordin impar există din orice număr real). Deci h este surjecţie, prin urmare, h este funcţie bijectivă.

Determinăm h^{-1}:

$$(y, x) \in G_{h^{-1}} \Leftrightarrow (x, y) \in G_h \Leftrightarrow h(x) = y = x^3 + 8 \Leftrightarrow x^3 = y - 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-8} \Leftrightarrow h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-8}.$$

23. Fie $f\colon [1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$ cu

$$f(x) = x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1.$$

a) Să se demonstreze că f este funcţie bigectivă.

b) Să se determine f^{-1}.

Soluție. a) Avem $f(x) = (x^2 - x + 1)^3$. Reprezentăm această funcţie ca compoziţie a două funcţii:

$u, v\colon [1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$, unde $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2 - x + 1$.

Atunci $f(x) = (u \circ v)(x)$, ce implică $f = u \circ v$, este bijectivă fiind compoziţie a două funcţii bijective.

b) $f^{-1} = (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$. Determinăm v^{-1} şi u^{-1}.

$$u^{-1}\colon [1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty),\quad u^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Deoarece $v(x) = x^2 - x + 1 = y \Rightarrow x^2 - x + 1 - y = 0$. Rezolvăm în raport cu $x \in [1, +\infty)$ această ecuaţie. Discriminantul este

$$D = 1 - 4(1 - y) = 4y - 3 \text{ şi } x_{1,2} = (1 \mp \sqrt{4y - 3})/2$$
$$(y \geq 1 \Leftrightarrow 4y - 3 \geq 0!).$$

Ecuaţia are o singură rădăcină în $[1, +\infty)$:

$$x = (1 + \sqrt{4y - 3})/2.$$

Atunci

$$v^{-1}(x) = (1 + \sqrt{4x - 3})/2.$$

Aşadar,

$$f^{-1}(x) = (v^{-1} \circ u^{-1})(x) = v^{-1}(u^{-1}(x)) = v^{-1}(\sqrt[3]{x}) =$$
$$= (1 + \sqrt{4\sqrt[3]{x} - 3})/2, \text{ cu } f^{-1}\colon [1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty).$$

24. Se consideră funcţia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $(\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

2) $f(1) = 1$;

3) $f(1/x) = 1/x^2 \cdot f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^*$.

a) Să se determine funcţia f.

b) Să se calculeze $f(\sqrt{1998})$.

Soluție. a) Pentru $x_2 = 0$ din 1), rezultă $f(x_1) = f(x_1) + f(0)$, ceea ce implică $f(0) = 0$. Pentru $x_2 = -x_1$ din 1), obţinem

$$f(0) = f(x_1) + f(-x_1) = 0 \Rightarrow f(-x_1) = -f(x_1) \Rightarrow f(x_2) =$$
$$= -f(-x_2) \Rightarrow f(-x_2) = -f(x_2).$$

Atunci

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1 + (-x_2)) \overset{1)}{=} f(x_1) + f(-x_2) =$$
$$= f(x_1) - f(x_2),\ (\forall)\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Fie $x \notin \{0, 1\}$. Atunci

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) \overset{3)}{=} \frac{1}{(1-x)^2} \cdot f(1-x) \overset{(1)}{=} \frac{f(1) - f(x)}{(1-x)^2}. \qquad (2)$$

Pe de altă parte, $\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+x}{1-x}=1+\frac{x}{1-x}$ implică

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=f\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\overset{1)}{=}f(1)+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=1+f\left(\frac{x}{1-x}\right)=$$

$$\overset{3)}{=}1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot f\left(\frac{1-x}{x}\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot\left[f\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]=$$

$$\overset{1)}{=}1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f(1)\right)=1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot f(x)-1\right)=$$

$$=1+\frac{1}{(1-x)^2}\cdot f(x)-\frac{x^2}{(1-x)^2}=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}. \qquad (3)$$

Din (2) şi (3) urmează

$$\frac{f(1)-f(x)}{(1-x)^2}=\frac{1-2x+f(x)}{(1-x)^2}\Leftrightarrow f(x)=x.$$

Deci $f(x)=x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

b) $f(\sqrt{1998})=\sqrt{1998}$.

Răspuns: a) $f(x)=x$; b) $f(\sqrt{1998})=\sqrt{1998}$.

25. Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice, să se demonstreze egalitatea

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\ A,B,C\in P(M).$$

Soluţie. Folosind proprietăţile $A=B\Leftrightarrow f_A=f_B$, vom demonstra egalitatea cerută calculând cu ajutorul lui f_A, f_B şi f_C funcţiile caracteristice ale mulţimilor $A\cup(B\cap C)$ şi $(A\cup B)\cap(A\cup C)$:

$$f_{A\cup(B\cap C)}\overset{6)}{=}f_A+f_{B\cap C}-f_A\cdot f_{B\cap C}\overset{4)}{=}f_A+f_B\cdot f_C-f_A(f_B\cdot f_C)=$$
$$=f_A+f_B\cdot f_C-f_A\cdot f_B\cdot f_C.$$

$$f_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}=f_{A\cup B}\cdot f_{A\cup C}\overset{6)}{=}(f_A+f_B-f_A\cdot f_B)(f_A+f_C-f_A\cdot f_C)=$$
$$=f_A^2+f_A\cdot f_C-f_A^2\cdot f_C+f_B\cdot f_A+f_B\cdot f_C-f_B\cdot f_A\cdot f_C-f_A^2\cdot f_B-$$
$$-f_A\cdot f_B\cdot f_C+f_A^2\cdot f_B\cdot f_C\overset{3)}{=}f_A+f_B\cdot f_C-f_A\cdot f_B\cdot f_C=f_{A\cup(B\cap C)},$$

ceea ce implică $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

2.3. Exerciţii propuse

1. Determinaţi domeniile de definiţie şi de valori ale relaţiilor:

1) $\alpha=\{(2,4),(3,1),(2,-4),(0,27)\}$;

2) $\beta=\{(100,10),(200,20),(300,30),(400,40)\}$;

3) $\gamma=\{(1,5),(2,7),(3,9),(4,11)\}$;

4) $\delta=\{(1/2,5)\}$;

5) $\rho = \{(-2,-5),(-2,0),(7,-2),(9,0)\}$;
6) $\omega = \{(-1,2),(-5,-2),(0,-2),(0,9)\}$.

2. Fie $A = \{2,4,6,8\}$ şi $B = \{1,3,5,7\}$, $\alpha \subseteq A \times B$.
a) Să se determine graficul relaţiei α.
b) Să se construiască schema relaţiei α:
1) $\alpha = \{(x,y)|x < 3$ şi $y > 3\}$;
2) $\alpha = \{(x,y)|x > 2$ şi $y < 5\}$;
3) $\alpha = \{(x,y)|x > 6$ sau $y > 7\}$;
4) $\alpha = \{(x,y)|\max(x,y) \leq 3\}$;
5) $\alpha = \{(x,y)|\min(x,y) \leq 2\}$;
6) $\alpha = \{(x,y)|\min(x,y) > 6\}$;
7) $\alpha = \{(x,y)|\min(x,5) > \max(y,3)\}$;
8) $\alpha = \{(x,y)|\max(x,6) > \max(y,5)\}$.

3. Fie $A = \{1,2,3,4\}$ şi $B = \{1,3,5,7,8\}$. Să se scrie graficul relaţiei $\alpha \subseteq A \times B$, dacă:
1) $\alpha = \{(x,y)|x + y = 9\}$;
2) $\alpha = \{(x,y)|2x - y = 1\}$;
3) $\alpha = \{(x,y)|x^2 - y^2 = 8\}$;
4) $\alpha = \{(x,y)|x - y \geq 3\}$;
5) $\alpha = \{(x,y)|y \vdots x\}$;
6) $\alpha = \{(x,y)|4x + y = 11\}$;
7) $\alpha = \{(x,y)|(x+y) \vdots 3\}$;
8) $\alpha = \{(x,y)|x \geq y\}$.

4. Fie $A = \{1,3,4,5\}$, $B = \{1,2,5,6\}$ şi G graficul relaţiei α. Să se scrie relaţia α prin propoziţii conţinând literele x şi y, cu $x \in A$ şi $y \in B$:
1) $G_\alpha = \{(1,5),(4,2),(5,1)\}$;
2) $G_\alpha = \{(1,2),(4,5),(5,6)\}$;
3) $G_\alpha = \{(1,2),(1,5),(1,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$;
4) $G_\alpha = \{(1,5),(1,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,5),(5,6)\}$;
5) $G_\alpha = \{(3,2),(4,2),(5,2)\}$;
6) $G_\alpha = \{(4,2),(4,6)\}$;
7) $G_\alpha = \{(4,1),(4,2),(4,5),(4,6),(1,6),(3,6),(5,6)\}$;
8) $G_\alpha = \{(1,1),(4,2)\}$.

5. Fie $A = \{1,2,3,4\}$. Să se cerceteze proprietăţile relaţiei $\alpha \subseteq A^2$(var. 1–6) şi $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ (var. 7–14):

1) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;
2) $\alpha = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,4),(4,3)\}$;
3) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
4) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;
5) $\alpha = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$;
6) $\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$;
7) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 1 \text{ şi } y > 1\}$;
8) $\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}\right\}$;
9) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ sau } y < 0\}$;
10) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1 \text{ sau } y > 1\}$;
11) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + x = y^2 + y\}$;
12) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 3x + 2 = y^2 - 3y + 2\}$;
13) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + x = y^2 - y\}$;
14) $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2\}$.

6. Pentru fiecare din relaţiile binare α definite pe mulţimea $\mathbb{N}$:

a) să se determine domeniul de definiţie δ_α şi domeniul de valori ρ_α;

b) să se stabilească proprietăţile (reflexivitatea, ireflexivitatea, simetria, antisimetria, tranzitivitatea);

c) să se determine relaţia inversă α^{-1} $(x, y \in \mathbb{N})$:

1) $x\alpha y \Leftrightarrow$ c.m.m.d.c. $(x,y) = 1$; 2) $x\alpha y \Leftrightarrow y < 2x$;
3) $x\alpha y \Leftrightarrow |y - x| = 12$; 4) $x\alpha y \Leftrightarrow x = y^2$;
5) $x\alpha y \Leftrightarrow (x - y) \vdots 3$; 6) $x\alpha y \Leftrightarrow x \cdot y = 30$;
7) $x\alpha y \Leftrightarrow y = 2x + 1$; 8) $x\alpha y \Leftrightarrow x < y + 1$;
9) $x\alpha y \Leftrightarrow x < y - 1$; 10) $x\alpha y \Leftrightarrow y = 2x$;
11) $x\alpha y \Leftrightarrow y^2 = x^2$; 12) $x\alpha y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.

7. Este dată mulţimea A şi relaţia binară $\alpha \subseteq A^2$. Să se demonstreze că α este relaţie de echivalenţă şi să se determine mulţimea factor A/α.

1) $A = \{1,2,3\}$, $\alpha = \{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(3,3)\}$;
2) $A = \{1,2,3,4\}$, $\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,2),$
$(3,3),(4,4),(3,2),(2,3)\}$;
3) $A = \{1,2,3,4\}$, $\alpha = \{(1,4),(1,1),(4,1),(1,2),(2,1),(3,3),$
$(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$;
4) $A = \{1,2,3\}$, $\alpha = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;
5) $A = \{1,3,5,6\}$, $\alpha = \{(1,6),(6,1),(1,1),(6,6),(3,3),(5,5)\}$;

6) $A = \{1,2,3,4\}$, $\alpha = \{(1,3),(1,4),(1,1),(3,3),(3,1),(4,1),$
$(4,4),(2,2),(3,4),(4,3)\}$;

7) $A = \mathbb{N}^2$, $(a,b)\alpha(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$;

8) $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, $(a,b)\alpha(c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$;

9) $A = \{1,2,3,4,6,9\}$, $\alpha = \{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2),(1,2),$
$(4,4),(3,3),(2,1),(6,6),(9,9)\}$;

10) $A = \{1,2,3,5\}$, $\alpha = \{(1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(2,1),(2,2),$
$(3,3),(3,2),(2,3),(5,5)\}$.

8. Fie dată mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ şi sistemul de submulţimi $S = \{A_i \subseteq A, i = \overline{1,n}\}$. Demonstraţi că S defineşte o partiţie pe A şi construiţi relaţia de echivalenţă α_S.

1) $A_1 = \{1,2,3,8,9\}$, $A_2 = \{4\}$, $A_3 = \{5,6,7\}$;

2) $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4\}$, $A_3 = \{5,6\}$, $A_4 = \{7,8\}$, $A_5 = \{9\}$;

3) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{5,6\}$, $A_4 = \{7,8,9\}$;

4) $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3,4,5\}$, $A_3 = \{2,7\}$, $A_4 = \{6,9\}$, $A_5 = \{8\}$;

5) $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,9\}$, $A_3 = \{4,8\}$, $A_4 = \{5,6,7\}$;

6) $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,8,9\}$, $A_3 = \{4,5,6\}$, $A_4 = \{7\}$;

7) $A_1 = \{1,9,7\}$, $A_2 = \{2,8,6\}$, $A_3 = \{3,4,5\}$;

8) $A_1 = \{7,8\}$, $A_2 = \{1,9\}$, $A_3 = \{2,3,4,5,6\}$;

9) $A_1 = \{1,8,9\}$, $A_2 = \{2,7\}$, $A_3 = \{4\}$, $A_4 = \{5\}$, $A_5 = \{3,6\}$;

10) $A_1 = \{1,3,5,7,9\}$, $A_2 = \{2,4,6,8\}$.

9. Definim pe $\mathbb{R}$ relaţia binară α:

$$x\alpha y \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = \ln^2 y - \ln y.$$

a) Să se arate că α este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine clasele de echivalenţă.

10. Definim pe $\mathbb{R}$ relaţia binară β:

$$x\beta y \Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x = \sin^2 y - 2\sin y.$$

a) Să se arate că β este o relaţie de echivalenţă.

b) Să se determine clasele de echivalenţă.

11. Fie $\alpha \subseteq A^2$, unde $A = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,$
$7,8\}$ cu

$$x\alpha y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y).$$

a) Este α o relaţie de echivalenţă?

b) În caz afirmativ, să se determine clasele de echivalenţă.

12. Să se determine $\delta_\alpha, \rho_\alpha, \alpha^{-1}, \alpha \circ \alpha, \alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^{-1} \circ \alpha$, dacă:

1) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | y \vdots x\}$;

2) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | x \vdots y\}$;

3) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x + y \leq 0\}$;

4) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | 2x \geq 3y\}$;

5) $\alpha = \{(x, y) \in [-\pi/2, -\pi/2]^2 | y \geq \sin x\}$.

13. Să se determine relaţiile $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^{-1}, β^{-1}, $\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, $(\beta \circ \alpha)^{-1}$:

1) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x \geq y\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | x \leq y\}$;

2) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x > y\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | x < y\}$;

3) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | x + y < 2\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | 2x - y > 0\}$;

4) $\alpha = \{(x, y) \in I\!R^2 | (x-1)^2 + y^2 > 1\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!R^2 | x^2 + y^2 \leq 2\}$;

5) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | x - y$ este par$\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | x - y$ este impar$\}$;

6) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | \, |x| = |y|\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | y = 2^x\}$;

7) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | x \vdots y\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!N^2 | y \vdots x\}$;

8) $\alpha = \{(x, y) \in I\!N^2 | x^y = 1\}$, $\beta = \{(x, y) \in I\!N^2 | x \cdot y = 1\}$.

14. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Să se determine domeniul de definiţie şi domeniul de valori ale fiecărei din următoarele relaţii α, β. Care din aceste relaţii sunt aplicaţii? Determinaţi tipul aplicaţiei. Determinaţi relaţiile $\alpha^{-1} \circ \alpha$, $\alpha \circ \beta^{-1}$, $\beta \circ \alpha^{-1}$, $\beta \circ \beta^{-1}$. Sunt ele aplicaţii?

1) $\alpha = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, d)\}$, $\beta = \{(1, d), (2, a), (3, c), (4, b)\}$;

2) $\alpha = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, c), (4, d)\}$,
$\beta = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$;

3) $\alpha = \{(2, a), (3, c), (4, d), (1, b), (2, b)\}$,
$\beta = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d)\}$.

15. Considerăm aplicaţia φ: $I\!R \longrightarrow I\!R$, $\varphi(x) = \sin x$. Să se determine $\varphi(I\!R)$, $\varphi((0, \pi))$, $\varphi^{-1}([-1, 0])$, $\varphi^{-1}(1/2)$, $\varphi^{-1}([1, 2])$, $\varphi^{-1}((1, 2])$.

16. Aplicaţia φ: $A \longrightarrow B$, unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, este dată de tabelul

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(x)$	a	d	b	f	b	c	b	d	e

Să se determine $\varphi(A)$, $\varphi(\{2, 3, 5\})$, $\varphi(\{5, 6, 7, 8\})$, $\varphi(\{1, 3, 7, 9\})$, $\varphi^{-1}(\{b, f, c\})$, $\varphi^{-1}(\{e, c\})$, $\varphi^{-1}(d)$.

17. Considerăm aplicaţia φ: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $\varphi(x) = [x]$ ($[x]$ este partea întreagă a lui x). Să se determine $\varphi(\{2,4,6,7\})$, $\varphi((1,5))$, $\varphi([-2.5;2])$, $\varphi^{-1}(\{2,4,5\})$ şi $\varphi^{-1}(-1)$.

18. Se dă aplicaţia φ: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\varphi(x) = x^2$. Determinaţi $\varphi(A)$ şi $\varphi^{-1}(A)$, dacă $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

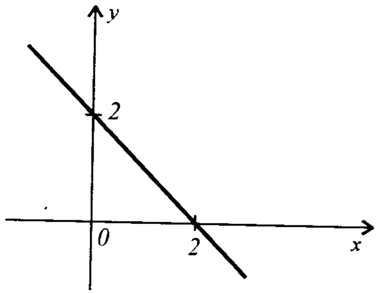
19. Fie A şi B două mulţimi finite, $|A| = m$, $|B| = n$. Câte aplicaţii surjective φ: $A \longrightarrow B$ există, dacă:

1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $m = 4$, $n = 3$; 4) $m = 5$, $n = 3$;

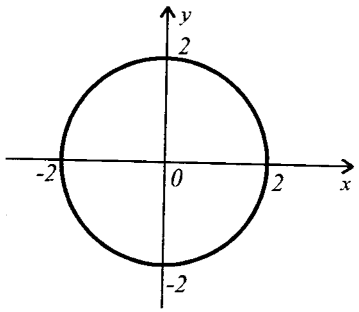
5) $m = 5$, $n = 4$; 6) $m = n = 5$?

20. Fiind dat graficul relaţiei α, stabiliţi dacă α este funcţie. Determinaţi δ_α şi ρ_α. Schimbând δ_α şi ρ_α, faceţi ca α să devină aplicaţie injectivă, surjectivă şi bujectivă. Construiţi graficul relaţiei α^{-1}. Relaţia α^{-1} este funcţie? Care este tipul ei?

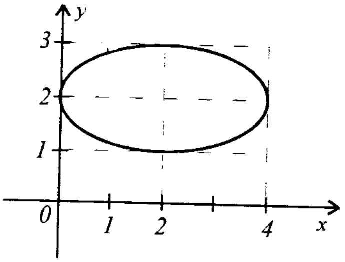
1) α: $x + y = 2$



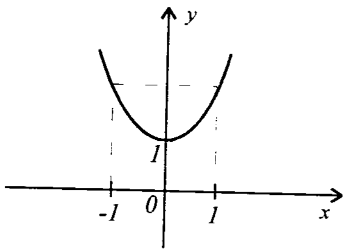
2) α: $x^2 + y^2 = 4$



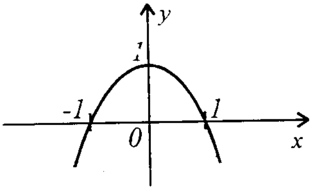
3) α: $(x-2)^2/4 + (y-2)^2 = 1$



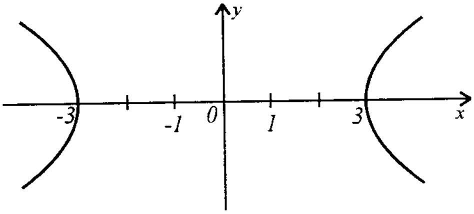
4) α: $y = x^2 + 1$



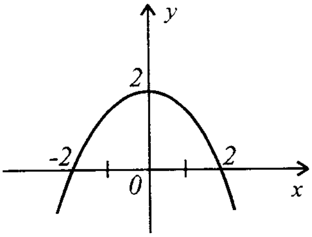
5) α: $y = -x^2 + 1$



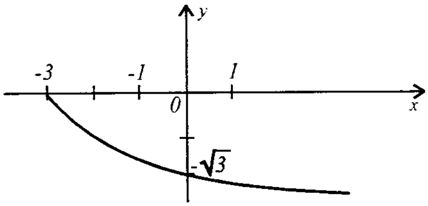
6) α: $x^2 - y^2 = 9$



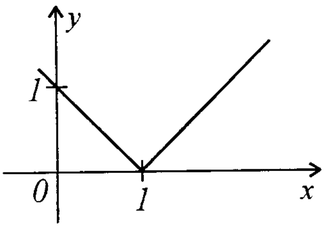
7) α: $y = 4 - x^2$



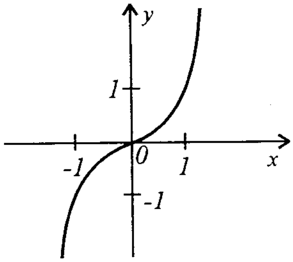
8) α: $y = -\sqrt{x+3}$



9) α: $y = |x - 1|$



10) α: $y = x^3$



21. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 5, 6\}$ şi $C = \{7, 8, 9\}$.

a) Să se facă diagramele a două funcţii injective şi a două funcţii neinjective definite pe C cu valori în B.

b) Să se facă diagramele a două funcţii surjective şi a două aplicaţii nesurjective definite pe A cu valori în C.

c) Să se facă diagramele a două funcţii bijective şi a două funcţii nebijective definite pe A cu valori în B.

22. Fie $A = \{1, 3, 5, 6\}$ şi $B = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $x \in A$, $y \in B$. Care dintre relaţiile de mai jos reprezintă o funcţie definită pe A cu valori în B? Dar o funcţie definită pe B cu valori în A? Pentru funcţii, indicaţi

tipul lor:

1) α: $x + y = 6$; 2) α: $y = x + 1$; 3) α: $x = y$;
4) α: $y = x^2$; 5) α: $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$;
6) α: $y^5 - 11y^4 + 41y^3 - 61y^2 + 30y - x + 1 = 0$.

23. Utilizându-se graficul funcţiei f: $A \longrightarrow B$, să se arate dacă f este injectivă, surjectivă, bijectivă. În cazul funcţiei bijective, să se determine f^{-1} şi să se construiască graficele lui f şi f^{-1} în acelaşi reper de coordonate.

1) f: $(-2;0) \cup [2,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = |x|$;
2) f: $\mathbb{R} \longrightarrow [2,+\infty)$, $f(x) = |x| + |x-2|$;
3) f: $[-2,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = \begin{cases} -x/2, & -2 \le x \le 0, \\ x+1, & x > 0; \end{cases}$
4) f: $\mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$, $f(x) = \begin{cases} |x^2-1|, & x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$
5) f: $\{0,1,3\} \longrightarrow \{-2,0,4\}$, $f(x) = 2x - 2$;
6) f: $\{-3,0,2\} \longrightarrow \{1, 11/5, 3, 4\}$, $f(x) = 0.2(2x + 11)$.

24. Care din următoarele relaţii $\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ sunt funcţii? Indicaţi domeniul de definiţie al funcţiilor. Stabiliţi tipul funcţiei:

1) α: $2y - 3x = 19$; 2) α: $x \cdot y = 9$; 3) α: $3x - 7 + 5y = 0$;
4) α: $2x^2+3y-6=0$; 5) α: $y = \sqrt{x-2}$; 6) α: $xy-2y+5x-7=0$;
7) α: $x^2 - (y-2)^2 = 0$; 8) α: $3(4-5x) + 4(y+5) = 1$;
9) α: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$; 10) α: $x^2 - y + 7x = 3$;
11) α: $4x - 2y = 9x + y$; 12) α: $y^2 + xy + 1 = 0$;
13) α: $x^2 + y^2 = 16$; 14) α: $y = x^2 - 3x + 1$; 15) α: $2xy = y^2 + 5$.

25. Este dată relaţia α cu $\delta_\alpha = [-3;5]$ şi $\rho_\alpha = [-4;7]$.

a) Perechea $(-4,5)$ aparţine relaţiei α? De ce?

b) Indicaţi toate perechile ordonate $(x,y) \in \alpha$ cu $x = 0$. Explicaţi.

26. Fiind dată funcţia $f(x)$, calculaţi valorile ei în punctele indicate.

1) $f(x) = -7$; $f(4)$, $f(-3)$, $f(c)$, $c \in \mathbb{R}$;
2) $f(x) = |x^3 - 2x|$; $f(5)$, $f(-2)$, $f(-7)$, $f(1,4)$;
3) $f(x) = x^4 - x^3 - x - 3$; $f(0)$, $f(-1)$, $f(2+c)$;
4) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{dacă } x > 0, \\ 2x + 3, & \text{dacă } x \le 0, \end{cases}$ $f(-2)$, $f(0)$, $f(5)$;

5) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{dacă } x>0, \\ -4, & \text{dacă } x=0, \\ 1-2x, & \text{dacă } x<0, \end{cases}$ $f(5)$, $f(-1)$, $f(1/2)$;

6) $f(x)=x^2-5x+2$; $(f(1+c)-f(1))/c$, $c\in \mathbb{R}^*$.

27. Determinaţi $D(f)$, dacă:

1) $f(x)=(2x+3)/(|x-4|)$;
2) $f(x)=\sqrt{|2x+1|}$;
3) $f(x)=5/(x^2+x+1)$;
4) $f(x)=3-2/(5-x)$;
5) $f(x)=\sqrt[3]{6x^2+13x-5}$;
6) $f(x)=(4x)/(9-4x^2)$;
7) $f(x)=(5x)/(\sqrt{4-3x})$;
8) $f(x)=\pi$;
9) $f(x)=(5x)/(x^2-2x-15)$.

28. Fiind date funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, determinaţi funcţiile $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ şi f/g, indicând domeniul de definiţie al acestora.

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$;
2) $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$, $g(x)=2x+1$;
3) $f(x)=x-5$, $g(x)=x^2+1$;
4) $f(x)=x-3$, $g(x)=2/x$;
5) $f(x)=x^2-4$, $g(x)=1-x^2$;
6) $f(x)=3/x$, $g(x)=4/x$;
7) $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-5x+6$;
8) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $g(x)=x$;
9) $f(x)=5$, $g(x)=-3$;
10) $f(x)=1-x^2$, $g(x)=4x$.

29. Reprezentaţi funcţia $f(x)$ sub formă de compoziţie a unor funcţii:

1) $f(x)=7(4x-9)^5+4$;
2) $f(x)=(x^2+3x)^{\frac{2}{3}}+(x^2+3x)^{\frac{1}{3}}-7$;
3) $f(x)=1/\sqrt{x^2-3}$;
4) $f(x)=4(x^2-3)^6-7$;
5) $f(x)=-2(x+5)^4+10$;
6) $f(x)=(2x-3)^2-(2x-3)+1$;
7) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$;
8) $f(x)=(x-1)^{\frac{4}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}-4$;
9) $f(x)=(3x+5)^{\frac{2}{3}}+3(3x+5)^{\frac{1}{3}}+7$;
10) $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt[3]{5-3x}}$.

30. Fiind date funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, să se determine funcţiile $f\circ g$ şi $g\circ f$ şi să se calculeze $(f\circ g)(3)$ şi $(g\circ f)(3)$ în variantele 1) – 6) şi $(f\circ g)(-1)$ şi $(g\circ f)(-1)$ în variantele 7) – 12).

1) $f(x)=x+2$, $g(x)=x-1$;
2) $f(x)=x^2+8$, $g(x)=x-3$;
3) $f(x)=g(x)=x$;
4) $f(x)=x^2-1$, $g(x)=x+1$;
5) $f(x)=2x^2+1$, $g(x)=x^2-1$;
6) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$;
7) $f(x)=x^2+2x+1$, $g(x)=-2x^2-1$;
8) $f(x)=3x^2+2$, $g(x)=x-3$;
9) $f(x)=2x^4+4x^3+1$, $g(x)=x^2+1$;
10) $f(x)=x-8$, $g(x)=|x|$;
11) $f(x)=|x+1|=g(x)$;
12) $f(x)=x-1$, $g(x)=x+1$.

31. Fiind date funcţiile $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ şi $h(x) = x - 1$, să se calculeze:

1) $(f \circ g)(1)$; 2) $(g \circ f)(1)$; 3) $(h \circ f)(3)$;
4) $(f \circ h)(3)$; 5) $(g \circ f)(-2)$; 6) $(f \circ h)(-3)$;
7) $(g \circ h)(-2)$; 8) $(h \circ g)(-2)$; 9) $(f \circ h)(-1/2)$;
10) $(g \circ f)(-1/2)$; 11) $(f \circ h)(\sqrt{2} + 3)$; 12) $(f \circ g)(1 + \sqrt{2})$;
13) $(f \circ g)(c)$; 14) $(g \circ h)(c)$; 15) $(f \circ (g \circ h))(c)$;
16) $((f \circ g) \circ h)(c)$.

32. Determinaţi dacă în perechile de funcţii f şi g una este inversa celeilalte:

1) $f(x)=2x+1$, $g(x)=\frac{x-1}{2}$; 2) $f(x)=-2x+3$, $g(x)=2x-3$;
3) $f(x)=x+4$, $g(x)=x-4$; 4) $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$;
5) $f(x)=4x-5$, $g(x)=\frac{x+5}{4}$; 6) $f(x)=x-\frac{1}{2}$, $g(x)=2x+1$;
7) $f(x)=x$, $g(x)=-x$; 8) $f(x)=-2x+3$, $g(x)=-2x-3$.

33. Se dă valoarea funcţiei f. Să se calculeze valoarea funcţiei f^{-1}, dacă:

1) $f(3) = 4$; 2) $f(1/2) = 6$; 3) $f(a) = b$;
4) $f(a + 1) = 2$; 5) $f(m + n) = p$.

34. Să se determine f^{-1}, dacă:

1) $f(x) = (x + 2)/2$; 2) $f(x) = (2x + 1)/x$;
3) $f(x) = 1/\sqrt{x} + 2$; 4) $f(x) = (1/x)^2$;
5) $f(x) = (x/(x + 4))^2$; 6) $f(x) = \sqrt{x/(x - 1)}$;
7) $f(x) = \sqrt{(x - 1)/(x + 1)}$; 8) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x + 2} - 2}$;
9) $f(x) = ((x - 3)/(x + 1))^2$; 10) $f(x) = (\sqrt{x/(x + 4)} - 2)^2$.

35. Este dată funcţia: $f\colon \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1. \end{cases}$$

a) Să se demonstreze că f este bijectivă.
b) Să se determine f^{-1}.
c) Să se calculeze $f \circ f^{-1}$ şi $f^{-1} \circ f$.

36. Fiind date funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$, să se determine funcţiile $(f \circ g)(x)$ şi $(g \circ f)(x)$ ($f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$):

1) $f(x) = |x - 1| + 2$; $g(x) = |x - 2| + 1$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ -5x - 1, & x > 0; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 4x - 2; & x < 0, \\ 3x^2 - 2, & x > 0. \end{cases}$

37. Să se demonstreze egalitatea funcţiilor f şi g:

1) f, g: $\{-1, 0, 1, 2\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$;
$g(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1$;

2) f, g: $\{-1, 0, 1\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin \pi x$;

3) f, g: $[1; 3] \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \max(-t^2 + 4t - 3)$, $1 \le t \le x$;
$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, 1 \le x \le 2, \\ 1 \qquad 2 < x \le 3; \end{cases}$$

4) f, g: $[-1; 1] \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1, -1 \le x \le 0, \\ x + 1, \quad 0 < x \le 1; \end{cases}$
$g(x) = \max(-x + 1,\ x + 1)$;

5) f, g: $\{-1, 0\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = 1 + x$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

6) f, g: $\{-1, 0\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = -1 + \sqrt{4 + 2x - x^2}$;
$g(x) = 1 - \sqrt{-2x - x^2}$;

7) f, g: $\{0, 2\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = 2 - x$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

8) f, g: $\{0, 2\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;
$g(x) = 2 - \sqrt{4x - x^2}$;

9) f, g: $[1, +\infty) \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$;
$$g(x) = \begin{cases} 2, \qquad 1 \le x \le 2, \\ 2\sqrt{x - 1}, x > 2; \end{cases}$$

10) f, g: $\{k\pi, 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} | k \in \mathbf{Z}\} \longrightarrow I\!R$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$.

38. Să se determine funcţiile $s = f + g$, $d = f - g$, $p = f \cdot g$ şi $q = f/g$:

1) f: $\{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 3, 5, 6\}$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 6$;
g: $\{1, 2, 3, 5\} \to \{1, 3, 4, 5\}$, $g(1) = 1$, $g(2) = 4$, $g(3) = 3$, $g(5) = 4$;

2) f, g: $I\!R \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} x + 2, x \le 3, \\ -x + 3, x > 3; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x - 2, x \le 0, \\ x + 1, x > 0; \end{cases}$

3) f, g: $I\!R \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} x, \quad x \le -1, \\ -x, -1 < x < 1, \\ 0, \quad x \ge 1; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x - 1, x < 0, \\ x, \quad x \ge 0; \end{cases}$

4) f: $[0, +\infty) \to I\!R$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, 0 \le x \le 2, \\ 1, \qquad x > 2; \end{cases}$

g: $(-\infty, 5] \to I\!R$, $g(x) = \begin{cases} -x, \quad x < 0, \\ 1, \quad x = 0, \\ x, 0 < x \le 5. \end{cases}$

5) f, g: $I\!R \to I\!R$, $f(x) = \max(x + 1,\ x^2)$; $g(x) = \min(-x, x)$.

39. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 4\}$ şi funcţiile
f: $A \longrightarrow B$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 3$;

$g\colon B \longrightarrow A,\ g(0) = 2,\ g(1) = 1,\ g(3) = 4,\ g(4) = 1.$

Pot fi definite funcţiile $f \circ g$, $g \circ f$? Dacă da, determinaţi aceste funcţii. Faceţi diagramele lor.

40. a) Să se arate că funcţia f este bijectivă.

b) Să se determine f^{-1}.

c) Să se reprezinte grafic funcţiile f şi f^{-1} în acelaşi reper de coordonate.

1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ , f(x) = 6x - 2;$

2) $f\colon [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty),\ f(x) = 3x + 1;$

3) $f\colon (-\infty, 0) \cup [2; 4] \longrightarrow (-\infty, 4],\ f(x) = -x^2 + 4x;$

4) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, 3) \cup [4, +\infty),\quad f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ \dfrac{2}{3}x + 4, & x > 0; \end{cases}$

5) $f\colon [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1],\quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \cos x, & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$

41. Să se arate că funcţia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 6x + 2$ admite restricţii inversabile pe:

a) $(-\infty, 3]$; b) $[3, +\infty)$; c) $(-\infty, 0] \cup [3, 6)$.

Să se determine inversele acestor funcţii şi să se reprezinte grafic în acelaşi reper de coordonare.

42. Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice, să se demonstreze egalităţile (afirmaţiile):

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

2) $(A \cup B = B \cap A) \Rightarrow (A = B);$

3) $\left.\begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array}\right\} \Rightarrow (B = C);$

4) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C);$

5) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C);$

6) $A \vartriangle B = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B);$

7) $A' \vartriangle B' = A \vartriangle B;$

8) $A' \vartriangle B = A \vartriangle B';$

9) $A \vartriangle B = \varnothing \Leftrightarrow A = B;$

10) $A \vartriangle B = A \cup B \Rightarrow A \cap B = \varnothing;$

11) $A \cap B = A \setminus B \Leftrightarrow A = \varnothing;$

12) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing;$

13) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B;$

14) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B.$

CAPITOLUL III

Elemente de combinatorică

3.1. Permutări. Aranjamente. Combinări. Binomul lui Newton

Pentru rezolvarea multor probleme practice (şi nu numai) este necesar:

1) de a putea evalua numărul diferitelor combinaţii, compuse cu elementele unei mulţimi sau cu elementele a mai multor mulţimi;

2) de a alege dintr-o mulţime de obiecte submulţimi (a face selecţii) de elemente care posedă anumite proprietăţi;

3) de a dispune elementele unei sau ale mai multor mulţimi într-o anumită ordine etc.

Domeniul matematicii care studiază probleme de felul acesta şi metodele de rezolvare a lor se numeşte combinatorică. Altfel spus, combinatorica studiază unele operaţii asupra mulţimilor finite. Aceste operaţii conduc la noţiunile de permutări, aranjamente şi combinări.

Fie $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulţime finită care are n elemente. Mulţimea M se numeşte **ordonată**, dacă fiecare element al său se asociază cu un anumit număr de la 1 la n, numit rangul elementului, astfel încât elemente diferite ale lui M se asociază cu numere diferite.

Definiţia 1. Toate mulţimile ordonate *care pot fi formate cu n elemente ale mulţimii date M* $(n(M) = n)$ *se numesc* **permutări** *de n elemente.*

Numărul tuturor permutărilor de n elemente se notează cu simbolul P_n şi se calculează conform formulei

$$P_n = n! \; (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n), \; n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Prin definiţie, se consideră $P_0 = 0! = 1 = 1! = P_1$.

Definiția 2. **Toate submulţimile ordonate** *care conţin m elemente ale mulţimii M cu n elemente se numesc* **aranjamente** *de n elemente luate câte m.*

Numărul tuturor aranjamentelor de n elemente luate câte m se notează cu simbolul A_n^m şi se calculează conform formulei

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1);\ 0 \le m \le n;\ n, m \in I\!N. \quad (2)$$

Definiția 3. **Toate submulţimile** *care conţin m elemente ale mulţimii M cu n elemente se numesc* **combinări** *de n elemente luate câte m.*

Numărul tuturor combinărilor de n elemente luate câte m se notează cu simbolul C_n^m şi se calculează conform formulei

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{P_n}{P_m \cdot P_{n-m}}, \quad (3)$$

unde $m, n \in I\!N;\ 0 \le m \le n$.

Remarcă. *În toate submulţimile din definiţiile* $1-3$, *fiecare element al mulţimii iniţiale* M *figurează o singură dată.*

Paralel cu combinaţiile în care fiecare din cele n elemente diferite ale unei mulţimi participă numai o singură dată, pot fi considerate şi combinaţii cu repetiţii, adică combinaţii în care unul şi acelaşi element poate participa mai mult decât o singură dată.

Fie date n grupe de elemente. Fiecare grupă conţine câteva elemente de acelaşi fel.

Definiția 1′. *Permutări de n elemente fiecare din ele conţinând* α_1 *elemente* a_{i_1}, α_2 *elemente* $a_{i_2}, \ldots,$ α_k *elemente* a_{i_k}, *unde* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$, *se numesc* **permutări** *de n elemente* **cu repetiţii.**

Numărul tuturor permutărilor cu repetiţii se notează cu simbolul $\overline{P}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ şi se calculează conform formulei

$$\overline{P}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_k!} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_k!}. \quad (4)$$

Definiția 2′. *Aranjamentele de n elemente fiecare din ele conţinând m elemente, iar unul şi acelaşi element se poate repeta în fiecare aranjament de un număr arbitrar de ori, dar nu mai mult de m ori, se*

numesc **aranjamente** *de n elemente luate câte m* **cu repetiţii**.

Numărul tuturor aranjamentelor cu repetiţii de n elemente luate câte m în fiecare se notează cu simbolul $\overline{A_n^m}$ şi se calculează conform formulei

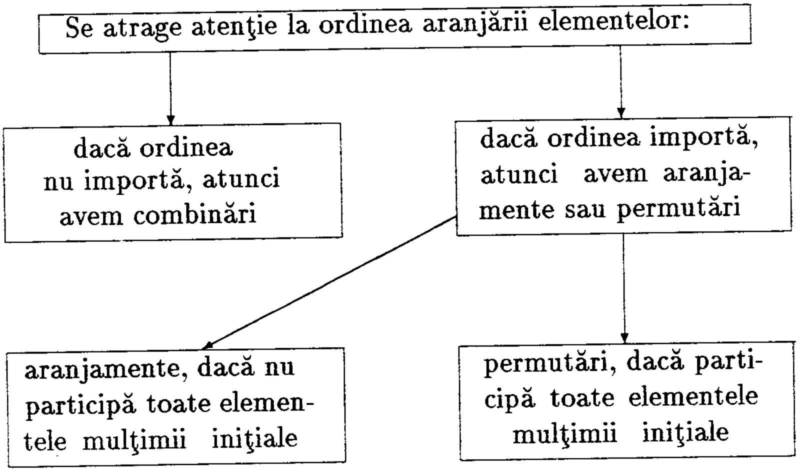
$$\overline{A_n^m} = n^m, \quad n, m \in I\!N^*. \tag{5}$$

Definiţia 3'. *Combinări de n elemente fiecare din ele conţinând m elemente, iar unul şi acelaşi element se poate repeta de mai multe ori, dar nu mai mult de m ori, se numesc* **combinări** *de n elemente luate câte m* **cu repetiţii**.

Numărul tuturor combinărilor cu repetiţii se notează cu simbolul $\overline{C_n^m}$ şi se calculează conform formulei

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!}; \quad n, m \in I\!N^*. \tag{6}$$

În procesul de rezolvare a problemelor de combinatorică este important de a stabili mai întâi tipul (forma) combinaţiei. Una din regulile de stabilire a tipului combinaţiei ar putea fi şi următorul tablou



Deseori este utilă folosirea următoarelor două reguli:

Regula sumei. Dacă obiectul A poate fi ales în m moduri, iar obiectul B în n moduri, atunci alegerea "sau A, sau B" poate fi efectuată în $m+n$ moduri.

Regula înmulţirii. Dacă obiectul A poate fi ales în m moduri şi după fiecare alegere de acest fel obiectul B poate fi ales, la rândul

său, în n moduri, atunci alegerea "A şi B" în această ordine poate fi efectuată în $m \cdot n$ moduri.

Vom menţiona, de asemenea, câteva proprietăţi ale combinărilor, şi anume:

I. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

II. $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$.

III. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$

$(C_n^{n-k} = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{n-k-1} + C_{n-3}^{n-k-2} + \ldots + C_{k-1}^0)$.

IV. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Formula

$$(x+a)^n = C_n^0 \cdot x^n + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot a + C_n^2 \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot x \cdot a^{n-1} + C_n^n \cdot a^n \quad (7)$$

se numeşte formula binomului lui Newton ($n \in \mathbb{N}^*$).

Coeficienţii $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ din formula binomului lui Newton se numesc coeficienţi binomiali; ei posedă următoarele proprietăţi:

V. Coeficienţii binomiali din dezvoltarea (7), egal depărtaţi de termenii extremi ai dezvoltării, sunt egali între ei.

VI a. Suma tuturor coeficienţilor binomiali este egală cu 2^n.

VI b. Suma coeficienţilor binomiali care se află pe locuri pare este egală cu suma coeficienţilor binomiali care se află pe locuri impare.

VII. Dacă n este un număr par (adică $n = 2k$), atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării (adică C_n^k) este cel mai mare. Dacă n este impar (adică $n = 2k + 1$), atunci coeficienţii binomiali ai celor doi termeni de la mijloc sunt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) şi sunt cei mai mari.

VIII. Termenul $C_n^k x^{n-k} a^k$, adică al $(k+1)$-lea termen din egalitatea (7), se numeşte termenul de rang $k+1$ (termenul general al dezvoltării) şi se notează cu T_{k+1}. Aşadar,

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot a^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

IX. Coeficientul termenului de rangul $k + 1$ în dezvoltarea binomului lui Newton este egal cu produsul coeficientului termenului de rangul k înmulţit cu exponentul lui x în acest termen şi împărţit la k, adică

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}. \quad (9)$$

X. $C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot C_n^k$. (10)

3.2. Probleme rezolvate

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft patru cărţi?

Soluție. Cum în problemă ordinea are importanţă şi, în plus, participă toate elementele mulţimii date, este vorba despre permutări. Deci

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Răspuns: 24.

2. Un tren de persoane are zece vagoane. În câte moduri pot fi aşezate vagoanele pentru formarea trenului?

Soluție. Ca şi în problema precedentă, este vorba de permutări de 10 elemente ale mulţimii care are 10 elemente. Atunci numărul modurilor în care poate fi format trenul este

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

Răspuns: 3 628 800.

3. În câte moduri şapte elevi pot fi aşezaţi în şapte bănci, astfel încât toate băncile să fie ocupate?

Soluție. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040$.

Răspuns: 5 040.

4. Câte numere de telefon a câte şase cifre pot fi formate:

1) cifra participă în numărul de telefon numai o singură dată;

2) cifra participă mai mult de o singură dată?

(Numărul de telefon poate începe şi cu cifra 0.)

Soluție. În total avem 10 cifre: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Cum numărul de telefon poate începe şi cu cifra 0, avem:

1) aranjamente din 10 cifre luate câte 6, adică

$$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200;$$

2) deoarece cifra în număr se poate repeta, avem aranjamente cu repetiţii, adică

$$\overline{A_{10}^6} = 10^6 = 1\,000\,000.$$

Răspuns: 1) 151 200; 2) 1 000 000.

5. Echipa de volei este formată din 6 sportivi. Câte echipe de volei poate forma un antrenor având 10 voleibalişti la dispoziţie?

Soluție. Deoarece la formarera echipei antrenorul este preocupat numai de componenţa acesteia, este suficient să determinăm numărul combinărilor de 10 elemente luate câte 6, adică

$$C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Răspuns: 210.

6. Câte numere de câte cinci cifre pot fi formate cu cifrele 0 şi 1?

Soluție. Cum cifrele se repetă şi ordinea are importanţă, este vorba de aranjamente cu repetiţii. Aici $m = 5$, $n = 2$.

Din cifrele 0 şi 1 pot fi formate $\overline{A_2^5} = 2^5$ numere a câte cinci cifre. Însă trebuie de luat în consideraţie că numărul nu poate începe cu cifra zero. Deci din numărul $\overline{A_2^5}$ trebuie scăzut numărul acelor numere care încep cu zero. Numere de felul acesta sunt $\overline{A_2^4}$. Prin urmare, numărul căutat este

$$\overline{A_2^5} - \overline{A_2^4} = 2^5 - 2^4 = 16.$$

Răspuns: 16.

7. Câte numere de câte trei cifre pot fi formate cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5$, dacă cifrele se pot repeta?

Soluție. Cum cifrele se repetă, evident este vorba despre aranjamente cu repetiţii de 5 cifre luate câte trei. Prin urmare, pot fi formate $\overline{A_5^3} = 5^3$ numere a câte trei cifre.

Răspuns: 125.

8. Din 10 trandafiri şi 8 gheorghine trebuie să se formeze buchete care conţin 2 trandafiri şi 3 gheorghine. Câte buchete de felul acesta pot fi formate?

Soluție. Doi trandafiri din cei 10 care îi avem pot fi aleşi în C_{10}^2 moduri, iar trei gheorghine din 8 pot fi luate în C_8^3 moduri. Aplicând regula înmulţirii, avem: numărul total de buchete care pot fi formate este $C_{10}^2 \cdot C_8^3 = 1\,890$.

Răspuns: 1 890.

9. La o serată dansantă participă 12 domnişoare şi 15 cavaleri. În câte moduri pot fi alese patru perechi pentru a dansa?

Soluție. Cele 12 domnişoare pot fi repartizate în grupuri a câte patru persoane în C_{12}^4 moduri, iar cei 15 cavaleri – în C_{15}^4 moduri. Deoarece în fiecare grup format de domnişoare (sau de cavaleri) ordinea are importanţă, fiecare din acest grup poate fi ordonat în P_4 moduri. Ca rezultat (aplicăm regula înmulţirii), vom avea $C_{12}^4 \cdot P_4 \cdot C_{15}^4 = A_{12}^4 \cdot C_{15}^4 = C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 16\,216\,200$.

Răspuns: 16 216 200.

10. Pentru efectuarea unui zbor cosmic pe Marte este necesar de a forma echipajul navei cosmice în următoarea componenţă: căpitanul navei, primul adjunct al căpitanului, al doilea adjunct al căpitanului, doi ingineri de bord şi un medic. Tripletul de comandă poate fi selectat din cei 25 de piloţi care se pregătesc de zbor, doi ingineri de bord din numărul de 20 de specialişti care cunosc la perfecţie construcţia corabiei cosmice, iar medicul – din numărul de 8 medici.

În câte moduri poate fi format echipajul navei cosmice?

Soluție. Alegând căpitanul şi adjuncţii săi, este important de determinat cine din piloţi ar face faţă mai bine unor funcţii oarecare de dirijare a navei. Deci este important şi modul de distribuire a funcţiilor între membrii tripletului format. Aşadar, tripletul de dirijare poate fi format în A_{25}^3 moduri.

Funcţiile ambilor ingineri de bord sunt cam aceleaşi. Ei pot îndeplini aceste funcţii cosecutiv. Deci perechea de ingineri poate fi formată în C_{20}^2 moduri. Referitor la medic – situaţia este aceeaşi, adică medicul poate fi ales în C_8^1 moduri.

Utilizând regula înmulţirii, avem: fiecărui triplet de dirijare i se poate asocia un cuplu de ingineri în C_{20}^2 moduri. În total vom avea $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2$ cvintete. Fiecărui cvintet i se asociază un medic în C_8^1 moduri. Ca rezultat, echipajul navei cosmice poate fi format în $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1$ moduri, sau

$$A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 20\,976\,000.$$

Răspuns: 20 976 000.

11. În câte moduri diferite pot fi alese cinci prăjituri de acelaşi fel sau diferite într-o cofetărie unde există 11 feluri diferite de prăjituri?

Soluție. Cele cinci prăjituri pot fi toate de un fel sau patru de un fel şi una de alt fel, sau trei de un fel şi două de altfel, ... etc. sau

toate de feluri diferite.

Numărul căutat al seturilor posibile a câte cinci prăjituri de cele 11 feluri este egal cu numărul combinărilor cu repetiţii de 11 elemente luate câte cinci, adică

$$\overline{C_{11}^{5}} = \frac{(11+5-1)!}{5!(11-1)!} = \frac{15!}{5!10!} = 3\,003.$$

Răspuns: 3 003.

12. Într-un grup de 10 sportivi sunt doi vâslaşi, trei înotători, iar ceilalţi sunt atleţi. Trebuie de format o echipă din 6 persoane pentru competiţiile care se apropie în aşa mod, încât în echipă să fie cel puţin câte un reprezentant al celor trei feluri de sport nominalizate.

În câte moduri poate fi formată această echipă?

Soluţie. a) În echipă poate fi un vâslaş, un înotător şi patru atleţi. Vâslaşul poate fi ales în C_2^1 moduri, înotătorul în C_3^1 moduri, iar atleţii – în C_5^4 moduri. Utilizând regula înmulţirii, avem $C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4$ moduri.

b) În echipă poate fi un vâslaş, doi înotători şi trei atleţi. Conform raţionamentelor anterioare, numărul echipelor de componenţa aceasta va fi $C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3$.

c) În echipă poate fi un vâslaş, trei înotători şi doi atleţi. Numărul echipelor în cazul acesta va fi $C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2$.

d) În echipă pot fi doi vâslaşi, un înotător şi trei atleţi. Vom avea $C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3$ de aceste echipe.

e) În echipă pot fi doi vâslaşi, doi înotători şi doi atleţi. Numărul de echipe va fi $C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2$.

f) În echipă pot fi doi vâslaşi, trei înotători şi un atlet. Echipe vor fi în număr de $C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1$.

Utilizând regula sumei, numărul total de echipe care pot fi formate este

$$C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^4 + C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 + C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_5^2 + C_2^2 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 + C_2^2 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2 + C_2^2 \cdot C_3^3 \cdot C_5^1 = 175.$$

Răspuns: 175.

13. Sunt date $k = 15$ litere mari, $m = 10$ vocale şi $n = 11$ consoane (în total $k + m + n = 36$ litere). Câte cuvinte diferite pot fi formate din aceste litere, dacă în fiecare cuvânt pe primul loc trebuie să fie o literă mare, printre celelalte litere trebuie să fie $\mu = 4$ vocale diferite (din numărul celor $m = 10$ date) şi $\nu = 6$ consoane diferite (din cele $n = 11$ date).

Soluție. Alegem o literă mare. Această alegere poate fi efectuată în k moduri. Apoi din m vocale alegem μ litere. Acest lucru poate fi făcut în C_m^μ moduri. În sfârşit, alegem ν consoane, ceea ce poate fi realizat în C_n^ν moduri. Utilizând regula înmulţirii, alegerea literelor necesare pentru formarea cuvântului poate fi efectuată în $k \cdot C_m^\mu \cdot C_n^\nu$ moduri.

După ce am plasat litera mare pe primul loc, cu celelalte $\mu + \nu$ litere pot fi formate $(\mu + \nu)!$ permutări. Fiecare permutare de felul acesta furnizează un cuvânt nou. Aşadar, în total pot fi formate $k \cdot C_m^\mu \cdot C_n^\nu(\mu + \nu)!$ cuvinte diferite, adică $15 \cdot C_{10}^4 C_{11}^6 \cdot 10!$

Răspuns: $15 \cdot C_{10}^4 C_{11}^6 \cdot 10!$

14. Într-o alimentară sunt trei feluri de bomboane. Bomboanele sunt ambalate în trei cutii diferite, pentru fiecare denumire cutia sa. În câte moduri poate fi comandat un set de cinci cutii?

Soluție (vezi problema 11). $\overline{C_3^5} = \dfrac{(3+5-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$

Răspuns: 21.

15. Pentru a forma garda de onoare de 10 persoane, sunt invitaţi ofiţeri ai trupelor: de infanterie, aviaţie, grăniceri, artilerie; ofiţeri ai flotei maritime şi ai trupelor de rachete.

În câte moduri poate fi aleasă componenţa gărzii de onoare?

Soluție. Avem 6 categorii de ofiţeri. Repetând raţionamentele din problema 10, avem de calculat combinări cu repetiţii de 6 elemente luate câte 10, adică

$$\overline{C_6^{10}} = \frac{(6+10-1)!}{(6-1)! \cdot 10!} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3\,003.$$

Răspuns: 3 003.

16. Pe un raft sunt $m + n$ cărţi diferite. Printre ele m sunt cu coperte albastre, iar n cu coperte galbene. Cărţile sunt permutate în toate modurile posibile. Câte poziţii diferite ale cărţilor sunt, dacă:

a) cărţile în coperte albastre ocupă primele m locuri;

b) cărţile în coperte albastre stau alături?

Soluție. a) Cărţile în coperte albastre pot fi plasate pe primele m locuri în $P_m = m!$ moduri. Cu fiecare repartizare de aşa fel, cărţile în coperte galbene pot fi repartizate în $P_n = n!$ moduri. Utilizând regula

înmulţirii, avem în total $m!\cdot n!$ poziţii în care cărţile în coperte albastre ocupă primele m locuri.

b) Fie cărţile în coperte albastre aranjate alături. Atunci după ele pe raft pot fi sau n cărţi în coperte galbene, sau $n-1$, sau $n-2, \ldots$, sau nici o carte în coperte galbene. Aşadar, putem plasa cărţile în coperte albastre, astfel încât ele să urmeze una după alta în $n+1$ moduri. În fiecare din aceste poziţii, cărţile în coperte galbene pot fi permutate în orice mod, de asemenea şi cărţile în coperte albastre pot fi permutate în orice mod. Drept rezultat, vom avea $m!\cdot n!\cdot(n+1)$ poziţii diferite ale cărţilor.

Răspuns: a) $m!\cdot n!$; b) $m!\cdot n!\cdot(n+1)$.

17. Aflaţi termenul al patrulea al dezvoltării binomului lui Newton $(2x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\,)^8$.

Soluție. Conform formulei (9), termenul de rangul 4 are forma

$$T_4 = C_8^3(2x\sqrt{x})^{8-3}\cdot(-x^{1/3})^3 = -C_8^3\cdot 2^5\cdot x^{15/2}\cdot x =$$
$$= -\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2^5\cdot x^{17/2} = -256\cdot 7\cdot x^{17/2} = -1792\cdot x^{17/2}.$$

Răspuns: $-1792\cdot x^{17/2}$.

18. Aflaţi coeficientul cel mai mare în dezvoltarea binomului

$$[(1+x)(1/x-1)]^m.$$

Soluție. $$\left[(1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]^m = \left(\frac{(1+x)(1-x)}{x}\right)^m = \frac{(1-x^2)^m}{x^m} =$$
$$= x^{-m}\cdot\sum_{k=0}^{m} C_m^k(-1)^k\cdot x^{2k}.$$

Dacă m este număr par, adică $m=2s$, $s\in \mathbb{N}^*$, atunci dezvoltarea binomului conţine $2s+1$ termeni, iar în baza proprietăţii VII, coeficientul C_{2s}^s este cel mai mare.

Dacă m este număr impar, adică $m=2s+1$, $s\in\mathbb{N}$, în baza aceleiaşi proprietăţi VII, dezvoltarea binomului conţine doi termeni care au coeficienţii cei mai mari $C_{2s+1}^s, C_{2s+1}^{s+1}$.

Răspuns: C_{2s}^s, dacă m este număr par; $C_{2s+1}^s, C_{2s+1}^{s+1}$, dacă m este număr impar.

19. Aflaţi termenii care nu-l conţin pe x în dezvoltarea binomului

$$[(1+x)(1+1/x)]^n.$$

Soluție. $\left[(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^n = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$. Termenul de rangul $k+1$ în dezvoltarea acestui binom are forma

$$T_{k+1} = \frac{1}{x^n} C_{2n}^k x^k = C_{2n}^k \cdot x^{k-n}.$$

Acest termen nu conţine x numai dacă $k - n = 0 \Leftrightarrow k = n$. Deci termenul care nu-l conţine pe x este T_{n+1}.

Răspuns: T_{n+1}.

20. În dezvoltarea binomului

$$(a\sqrt[5]{a/3} - b/\sqrt[7]{a^3}\,)^n$$

aflaţi termenul care conţine pe a la puterea a treia, dacă suma coeficienţilor binomiali care se află pe locuri impare în dezvoltarea binomului este egală cu 2 048.

Soluție. Vom afla mai întâi exponentul n. În baza proprietăţii VI a, suma coeficienţilor binomiali este 2^n. Deoarece suma coeficienţilor care se află pe locuri impare este egală cu 2048, iar în baza proprietăţii VI b, ea este egală cu suma coeficienţilor care se află pe locuri pare în dezvoltarea respectivă, avem

$$2048 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{11} = 2^{n-1} \Leftrightarrow n = 12.$$

Aşadar, gradul binomului este 12. Termenul de rangul $k+1$ ia forma

$$T_{k+1} = C_{12}^k (a\sqrt[5]{a/3}\,)^{12-k} \cdot (-1)^k \cdot (b/\sqrt[7]{a^3}\,)^k =$$

$$= C_{12}^k \cdot (-1)^k / (3^{(12-k)15}) \cdot (a^{6/5})^{12-k} \cdot a^{-3k/7} \cdot b^k.$$

Ţinând cont de cerinţele problemei, avem

$$a^{\frac{6(12-k)}{5} - \frac{3k}{7}} = a^3 \Leftrightarrow \frac{72-6k}{5} - \frac{3k}{7} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \cdot 7 - 2 \cdot 7k - 5k = 35 \Leftrightarrow 19k = 133 \Leftrightarrow k = 7,$$

iar

$$T_8 = C_{12}^7 \cdot a^3 \cdot 3^{-1} \cdot (-1)^7 \cdot b^7 = -264a^3b^7.$$

Răspuns: $-264a^3b^7$.

21. Pentru care valoare a lui n coeficienţii binomiali ai termenilor al doilea, al treilea şi al patrulea din dezvoltarea binomului $(x+y)^n$ formează o progresie aritmetică?

Soluție. În baza formulei (8), avem

$$T_2 = C_n^1 x^{n-1} y, \quad T_3 = C_n^2 x^{n-2} y^2, \quad T_4 = C_n^3 x^{n-3} y^3,$$

iar din condiţiile problemei rezultă relaţia

$$C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n(6+(n-1)(n-2)-6(n-1))=0 \overset{n\in N^*}{\Longleftrightarrow} n^2-9n+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2, \\ n=7. \end{array}\right.$

Condiţiile problemei sunt verificate de valoarea $n=7$.

Răspuns: $n=7$.

22. Demonstraţi că diferenţa coeficienţilor lui x^{k+1} şi x^k în dezvoltarea binomului $(1+x)^{n+1}$ este egală cu diferenţa coeficienţilor lui x^{k+1} şi x^{k-1} în dezvoltarea binomului $(1+x)^n$.

Soluţie. Coeficienţii lui x^{k+1} şi x^k în dezvoltarea binomului $(1+x)^{n+1}$ sunt C_{n+1}^{k+1} şi C_{n+1}^{k}, respectiv. Evaluăm diferenţa

$$C_{n+1}^{k+1}-C_{n+1}^{k} \overset{(9)}{=} \frac{(n+1)-k}{k+1}C_{n+1}^{k}-C_{n+1}^{k}=\left(\frac{n+1-k}{k+1}-1\right)\cdot C_{n+1}^{k}=$$

$$=\frac{n+1-k-k-1}{k+1}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\frac{(n-2k)\cdot(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n+1-k)!}. \quad (*)$$

În dezvoltarea binomului $(1+x)^n$, coeficienţii lui x^{k+1} şi x^{k-1} sunt C_n^{k+1} şi C_n^{k-1}, respectiv. Evaluăm diferenţa

$$C_n^{k+1}-C_n^{k-1} \overset{(9)}{=} \frac{n-k}{k+1}C_n^k-C_n^{k-1} \overset{(9)}{=} \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n-k+1}{k}\cdot C_n^{k-1}-C_n^{k-1}=$$

$$=\left(\frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k}-1\right)\cdot C_n^{k-1}=$$

$$=\frac{(n-k)^2+(n-k)-k^2-k}{(k+1)k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{(n+1)(n-2k)\cdot n!}{(k+1)!(n-k+1)!}=\frac{(n-2k)\cdot(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k+1)!}. \quad (**)$$

Cum membrii din dreapta în $(*)$ şi $(**)$ sunt egali, rezultă egalitatea membrilor din stânga, adică

$$C_{n+1}^{k+1}-C_{n+1}^{k}=C_n^{k+1}-C_n^{k-1},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

23. Comparând coeficienţii lui x în ambii membri ai egalităţii

$$(1+x)^m\cdot(1+x)^n=(1+x)^{m+n},$$

demonstraţi că

$$C_n^kC_m^0+C_n^{k-1}C_m^1+\ldots+C_n^0C_m^k=C_{m+n}^k. \quad (A)$$

Soluţie. $(1+x)^m\cdot(1+x)^n=(C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+\ldots+C_m^kx^k+\ldots+C_m^{m-1}x^{m-1}+x^m)\cdot(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+x^n)$.

În membrul drept al acestei egalităţi, coeficientul lui x^k este

$$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^2 \cdot C_n^{k-2} + \ldots + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + C_n^0 \cdot C_m^k,$$

iar în dezvoltarea binomului $(1+x)^{n+m}$, termenul de rangul $k+1$ are forma

$$T_{k+1} = C_{m+n}^k \cdot x^k.$$

Cum polinoamele $(1+x)^m \cdot (1+x)^n$ şi $(1+x)^{m+n}$ sunt egale şi au acelaşi grad, rezultă egalitatea coeficienţilor pe lângă aceleaşi puteri ale lui x, or aceasta şi finalizează demonstraţia egalităţii (A).

24. Demonstraţi egalitatea

$$\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^n}{1} = \frac{2}{n+1}\left(2^n - \frac{1}{2}\right).$$

Soluţie. Fie $\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^n}{1} = A \overset{V}{\Leftrightarrow} \frac{C_n^n}{n+1} + \frac{C_n^{n-1}}{n} +$

$$+ \frac{C_n^{n-2}}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^0}{1} = A.$$

Multiplicăm ambii membri ai ultimei egalităţi cu $(n+1)$. Obţinem

$$\frac{n+1}{n+1}C_n^n + \frac{n+1}{n}C_n^{n-1} + \frac{n+1}{n-1}C_n^{n-2} + \ldots + \frac{n+1}{1}C_n^0 = A(n+1) \overset{(10)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = A(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = C_{n+1}^0 + A(n+1) \overset{IV}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n+1} = C_{n+1}^0 + A(n+1) \Leftrightarrow 2^{n+1} - C_{n+1}^0 = A(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \Leftrightarrow A = \frac{2}{n+1} \cdot \left(2^n - \frac{1}{2}\right).$$

Revenind la expresia iniţială, avem

$$\frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \frac{C_n^n}{1} = \frac{2}{n+1}\left(2^n - \frac{1}{x}\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

25. Demonstraţi că

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0.$$

Soluţie. Scriem dezvoltarea binomului $(x-1)^n$:

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x + (-1) C_n^n. \qquad (A)$$

Derivăm ambii membri ai egalităţii (A) în raport cu x. Obţinem

$$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + (n-2)C_n^2 x^{n-3} -$$

$$-(n-3)C_n^3 x^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}. \qquad (**)$$

Punem în (**) $x = 1$. Atunci

$$0 = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

(Alte metode vezi pag. 54 în [2].)

26. Demonstraţi că egalitatea

$$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \ldots - 10^{2n-1}C_{2n}^1 + 10^{2n} = (81)^n$$

este adevărată.

Soluție. Se observă că expresia

$$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + \ldots - 10^{2n-1}C_{2n}^1 + 10^{2n}$$

reprezintă dezvoltarea binomului $(1 - 10)^{2n} = 9^{2n} = (81)^n$, ceea ce trebuia demonstrat.

27. Aduceţi expresia $P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n$ la o formă mai simplă.

Soluție. Vom efectua transformările de rigoare aplicând metoda inducţiei matematice. Fie

$$P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n = A_n. \qquad (*)$$

Pentru:

$n = 1$, avem $P_1 = A_1 \Leftrightarrow A_1 = 1$;

$n = 2$, avem $P_1 + 2p_2 = A_2 \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot 2! = A_2 \Leftrightarrow 5 = A_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3! - 1 = A_2 \Leftrightarrow P_3 - 1 = A_2$.

$n = 3$, avem $P_1 + 2p_2 + 3P_3 = A_3 \Leftrightarrow A_2 + 3P_3 = A_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3! - 1 + 3 \cdot 3! = A_3 \Leftrightarrow 3!(1+3) - 1 = A_3 \Leftrightarrow 4! - 1 =$
$= A_3 \Leftrightarrow P_4 - 1 = A_3$.

Presupunem că pentru $n = k$ egalitatea (*) ia forma

$$P_1 + 2P_2 + \ldots + kP_k = (k+1)! - 1. \qquad (**)$$

Calculăm valoarea expresiei (*) pentru $n = k + 1$. Avem

$$P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + kP_k + (k+1)P_{k+1} \overset{(**)}{=} (k+1)! - 1 + (k+1)P_{k+1} =$$
$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1 + k + 1) - 1 =$$
$$= (k+2)! - 1 = P_{k+2} - 1.$$

În baza principiului inducţiei matematice, ajungem la concluzia că

$$P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n = (n+1)! - 1 = P_{n+1} - 1.$$

Răspuns: $P_1 + 2P_2 + \ldots + nP_n = P_{n+1} - 1$.

28. Să se arate că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, $m! \cdot n!$ divide $(m+n)!$

Soluție. Conform definiției 3, $\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!} = C_{m+n}^{n}$ este numărul submulțimilor care au n elemente ale unei mulțimi cu $(m+n)$ elemente, adică C_{m+n}^{n} este un număr natural. Prin urmare, $\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$ este număr întreg, or aceasta și arată că $m!\cdot n!$ divide $(m+n)!$

29. Să se deducă egalitatea

$$(n-k)C_n^{k+1} - (k+1)C_n^k = (n-2k-1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Soluție. Utilizăm proprietatea X. Avem

$$C_n^{k+1} = (n-k)/(k+1)C_{n+1}^{k+1}, \quad C_n^k = (k+1)/(n+1)C_{n+1}^{k+1}.$$

Ca rezultat,

$$(n-k)C_n^{k+1} - (k+1)C_n^k = \frac{(n-k)^2}{n+1}C_{n+1}^{k+1} - \frac{(k+1)^2}{n+1}C_{n+1}^{k+1} =$$

$$= \frac{(n-k)^2-(k+1)^2}{n+1}\cdot C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n-k-k-1)(n-k+k+1)}{n+1}C_{n+1}^{k+1} =$$

$$= \frac{(n-2k-1)(n+1)}{n+1}\cdot C_{n+1}^{k+1} = (n-2k-1)\cdot C_{n+1}^{k+1}, \text{ c.t.d.}$$

30. Să se calculeze suma

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \ldots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Soluție. Se observă că termenul a_n al acestei sume poate fi transformat în modul următor

$$a_n = \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} = \frac{n+2}{n!(1+n+1+(n+1)(n+2))} =$$

$$= \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{n!(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Atunci suma S_n ia forma

$$S_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!} + \ldots - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} -$$

$$- \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Răspuns: $S_n = 1/2 - 1/(n+2)!$

31. Rezolvați ecuația

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

Soluție. $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x+6\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+6\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=9x^2-14x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=9x^2-14x \overset{x\geq 0}{\Longleftrightarrow} 1+3x-3+x^2-$$

$$-3x+2-9x+14=0\Leftrightarrow x^2-9x+14=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,\\ x=7.\end{array}\right.$$

Deoarece C_x^3 are sens numai pentru $x\geq 3$, rezultă că soluţie a ecuaţiei iniţiale este $x=7$.

Răspuns: $x=7$.

32. Rezolvaţi ecuaţia

$$C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7(x-1).$$

Soluţie. $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7(x-1)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-2)!((x+1)-(x-2))!}+2\cdot\frac{(x-1)!}{(x-1-3)!}=7(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)!(x-1)x(x+1)}{(x-2)!\cdot 3!}+2\cdot\frac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)}{(x-4)!\cdot 3!}=7(x-1)\overset{x\geq 4}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x(x+1)+2(x-3)(x-2)(x-1)-42(x-1)=0\Leftrightarrow x^2-3x-10=$$

$$=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2,\\ x=5\end{array}\right. \Rightarrow x=5.$$

Răspuns: $x=5$.

33. Rezolvaţi ecuaţia

$$(A_{x+1}^{y+1}\cdot P_{x-y})/P_{x-1}=72. \qquad (A)$$

Soluţie. Deoarece $A_{x+1}^{y+1}=(x+1)!/(x-y)!$, $P_{x-y}=(x-y)!$, $P_{x-1}=(x-1)!$, avem $(A)\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)!}{(x-y)!}\cdot\dfrac{(x-y)!}{(x-1)!}=72 \underset{0\leq y\leq x}{\overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow}} x(x+1)=$

$$=72\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8,\\ x=-9\end{array}\right. \overset{x\in \mathbb{N}^*}{\Longrightarrow} x=8.$$

Cum $y\in\mathbb{N}$ şi $y\leq x$, avem $y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Răspuns: $x=8$; $y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

34. Să se determine valorile lui x care verifică egalitatea

$$(x+2)!=-15(x-1)!+5[x!+(x+1)!].$$

Soluţie. $(x+2)!=-15(x-1)!+5[x!+(x+1)!]\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)!x(x+1)(x+2)=-15(x-1)!+5[(x-1)!x+(x-1)!x(x+1)]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)!x(x+1)(x+2)=(x-1)![-15+5x+5x(x+1)]\overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x(x^2+3x+2)=-15+5x^2+10x\Leftrightarrow x^3-2x^2-8x+15=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x^2 + x - 5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 3$, deoarece soluţiile ecuaţiei $x^2+x-5=0$ sunt numere iraţionale.

Răspuns: $x = 3$.

35. Să se rezolve ecuaţia $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)!$

Soluție. $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)! \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)!}{(x-n)!} \cdot (x-n)! =$
$= 90(x-1)! \underset{0\leq n\leq x}{\overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow}} (x-1)!x(x+1) = 90(x-1)! \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -10 \end{array} \right. \Rightarrow x = 9$. Atunci $n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Răspuns: $x = 9$, $\quad n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

36. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\left\{ \begin{array}{l} A_y^x : P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720. \end{array} \right. \qquad (B)$$

Soluție. Din condiţiile problemei, avem $x, y \in I\!N$ cu $x \geq 1$ şi $x \leq y$. În baza formulelor (1) – (3), avem

$$(B) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y!}{(y-x)!} \cdot \dfrac{1}{(x-1)!} + \dfrac{y!}{(y-x)!x!} = 126, \\ (x+1)! = 720 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y!(x+1)}{(y-x)! \cdot x!} = 126, \\ (x+1)! = 6! \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y! \cdot 6}{(y-x)! \cdot 5!} = 126, \\ x+1 = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y = 5! \cdot 21, \\ x = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^5 - 10y^4 + 35y^3 - 50y^2 + 24y - 2520 = 0, \\ x = 5. \end{array} \right. \qquad (*)$$

Divizori ai termenului liber în $(*)$ sunt numerele

$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; \pm 6; \pm 7; \pm 8; \pm 9; \pm 10; \ldots$.

Utilizăm schema lui Horner şi teorema Bezout pentru a selecta numerele care sunt soluţii ale ecuaţiei $(*)$. Cum $y \in I\!N$, vom verifica numai numerele naturale. Se verifică: numerele $\{1,2,3,4,5,6\}$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei $(*)$.

Verificăm $y = 7$.

	1	−10	35	−50	24	−2520
7	1	−3	14	48	360	0

Deci

$$(*) \Leftrightarrow (y-7)(y^4-3y^3+14y^2+48y+360)=0 \Leftrightarrow y=7,$$

deoarece pentru $y>7$, expresia $y^4-3y^3+14y^2+48y+360>0$.
Aşadar, soluţia sistemului (B) este perechea $(5,7)$.

Răspuns: $\{(5,7)\}$.

37. Aflaţi x şi y, dacă

$$C_x^{y-1} : (C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-2}+2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3:5:5. \qquad (C)$$

Soluție. Vom aduce mai întâi la o formă mai simplă expresia

$$C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-2}+2C_{x-2}^{y-1}=(C_{x-2}^{y}+C_{x-2}^{y-1})+(C_{x-2}^{y-1}+C_{x-2}^{y-2})\overset{II}{=}$$
$$=C_{x-1}^{y}+C_{x-1}^{y-1}\overset{II}{=}C_x^y.$$

Ca rezultat, sistemul (C) ia forma

$$C_x^{y-1}:C_x^y:C_x^{y+1}=3:5:5 \Leftrightarrow \begin{cases} C_x^{y-1}:C_x^y=3:5, \\ C_x^y:C_x^{y+1}=5:5, \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}:\dfrac{x!}{y!(x-y)!}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!}:\dfrac{x!}{(x-y-1)!(y+1)!}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!\,(x-y)!}{(y-1)!\,(x-y+1)!}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{(x-y-1)!\,(y+1)!}{y!\cdot(x-y)!}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y=3x-3y+3, \\ y+1=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y=6y+3+3, \\ x=2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3, \\ x=7. \end{cases}$$

Răspuns: $\{(7{,}3)\}$.

38. Să se determine valorile lui x, astfel încât

$$(x(x+1)!)/(2\cdot x!) \le 2x+9.$$

Soluție. Din enunţ rezultă $x \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\frac{x(x+1)!}{2\cdot x!} \le 2x+9 \Leftrightarrow \frac{x\cdot x!(x+1)}{2\cdot x!} \le 2x+9 \Leftrightarrow x^2+x \le 4x+18 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-3x-18 \le 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-6) \le 0 \overset{x\in \mathbb{N}}{\Longleftrightarrow} x-6 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 6$ şi $x \in \mathbb{N}$. Deci $x \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Răspuns: $x \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

39. Să se găsească valorile lui x care verifică inecuaţia

$$x \cdot C_{x-1}^{x-3} - 7 \cdot C_{x-2}^{x-3} \le 8(x-2). \qquad (*)$$

Soluţie. $(*)$ are sens pentru $x \in \mathbb{N}$ şi $x \ge 3$. Deoarece $C_{x-1}^{x-3} = C_{x-1}^2 = \dfrac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}$; $C_{x-2}^{x-3} = C_{x-2}^1 = x-2$, rezultă că $(*) \Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)(x-2)}{2} - 7(x-2) \le 8(x-2) \Leftrightarrow (x-2)[x(x-1)-30] \le$ $\le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-30) \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+5)(x-6) \le 0 \overset{x\in \mathbb{N}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-6) \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=4, \\ x=5, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Răspuns: $x \in \{3,4,5,6\}$.

40. Să se rezolve sistemul de inecuaţii:

$$\begin{cases} C_{x+1}^{x-2} - C_{x+1}^{x-1} \le 100, \\ C_{x+5}^4 - \dfrac{143 \cdot P_{x+5}}{96 \cdot P_{x+3}} < 0. \end{cases} \qquad (D)$$

Soluţie. $(D) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{(x-2)!\cdot 3!} - \dfrac{(x+1)!}{(x-1)!\cdot 2!} \le 100, \\ \dfrac{(x+5)!}{4!\cdot(x+1)!} - \dfrac{143\cdot(x+5)!}{96\cdot(x+3)!} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\overset{x\ge 2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{(x-1)x(x+1)}{3!} - \dfrac{x(x+1)}{2!} \le 100, \\ \dfrac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{4!} - \dfrac{143(x+4)(x+5)}{96} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-4) \le 600, \\ (x+4)(x+5)(4(x+2)(x+3)-143) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600 \le 0, \\ 4x^2+20x-119 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\overset{x\geq 2}{\underset{x\in N}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600\leq 0, \\ x\in\{2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600\leq 0, \\ x=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x^3-3x^2-4x-600\leq 0, \\ x=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8-12-8-600\leq 0, \\ x=2, \end{cases} \\ \begin{cases} 27-27-12-600\leq 0, \\ x=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Răspuns: $x \in \{2,3\}$.

3.3. Exerciţii propuse

1. O comisie este formată din preşedinte, adjunctul sau şi încă cinci persoane. În câte moduri membrii comisiei pot distribui funcţiile între ei?

2. În câte moduri pot fi alese trei persoane dintr-un grup de 20 de persoane pentru a efectua o lucrare?

3. Într-o vază sunt 10 garoafe roşii şi 4 roze. În câte moduri pot fi alese trei flori din vază?

4. Lacătul poate fi descuiat numai în cazul când a fost corect format un număr de trei cifre din cele cinci cifre fixate. Numărul este format la ghici, luând la întâmplare 3 cifre. S-a dovedit că numai la ultima încercare lacătul a fost descuiat. Câte încercări au precedat succesul?

5. Pe un raft sunt 30 de volume. În câte moduri pot fi aranjate cărţile, astfel încât volumele 1 şi 2 să nu fie alături pe raft?

6. Patru trăgători trebuie să nimerească opt ţinte (fiecare câte două). În câte moduri pot fi repartizate ţintele între trăgători?

7. Câte numere de patru cifre, formate cu cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5$, conţin cifra 3, dacă: a) cifrele în număr nu se repetă; b) cifrele se pot repeta?

8. În secţia de pian activează 10 persoane, în secţia de declamatori 15 persoane, în secţia de canto 12 persoane, iar în secţia de fotografie – 20 de persoane. În câte moduri poate fi formată o echipă

în care să fie 4 declamatori, 3 pianişti, 5 cântăreţi şi un fotograf?

9. Şapte mere şi trei portocale trebuie puse în două pungi în aşa mod ca în fiecare din ele să fie cel puţin o portocală şi numărul de fructe în pungi să fie acelaşi. În câte moduri poate fi realizată această repartizare?

10. Numărul de înmatriculare al unei remorci este compus din două litere şi patru cifre. Câte numere de înmatriculare diferite pot fi formate utilizând 30 de litere şi 10 cifre?

11. Pe o latură a unui triunghi sunt luate n puncte, pe latura a doua sunt luate m puncte, iar pe latura a treia a acestui triunghi sunt luate k puncte. În plus, nici unul din punctele considerate nu este vârf al triunghiului. Câte triunghiuri există cu vârfuri în aceste puncte?

12. În jurul unei mese trebuie aşezaţi cinci cavaleri şi cinci domnişoare în aşa mod ca să nu stea alături nici două domnişoare, nici doi cavaleri. În câte moduri poate fi făcut acest lucru?

13. Două variante ale unei lucrări de control la matematică trebuie distribuite la 12 elevi. În câte moduri pot fi aşezaţi elevii în două rânduri astfel încât elevii de alături să aibă variante diferite, iar cei care stau unul după altul să aibă aceeaşi variantă?

14. Şapte obiecte diferite trebuie distribuite la trei persoane. În câte moduri poate fi făcută această distribuire, dacă uneia sau la două persoane poate să nu le nimerească nici un obiect?

15. Câte numere de şase cifre pot fi formate cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, astfel încât cifrele să nu se repete, iar cifrele de la începutul numărului şi de la sfârşitul lui să fie pare?

16. Câte numere diferite de patru cifre pot fi formate folosind cifrele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, dacă în fiecare din ele figurează cifra unu o singură dată, iar celelalte cifre se pot întâlni de mai multe ori?

17. Pentru a acorda premii câştigătorilor la olimpiada de matematică, au fost puse la dispoziţie trei exemplare ale unei cărţi, două exemplare ale altei cărţi şi un exemplar al cărţii a treia. Câte premii pot fi acordate, dacă la olimpiadă au participat 20 de persoane şi nimănui nu i se înmânează două cărţi concomitent? Aceeaşi problemă,

dacă nimănui nu i se înmânează două exemplare ale uneia şi aceleiaşi cărţi, dar pot fi înmânate două sau trei cărţi diferite?

18. Literele alfabetului Morze sunt alcătuite din simboluri (puncte şi liniuţe). Câte litere se pot desena, dacă vom cere ca fiecare literă să conţină nu mai mult de cinci simboluri?

19. Pentru a găsi prietenul rătăcit, nişte excursionişti s-au divizat în două grupuri egale. Printre ei sunt numai patru persoane care cunosc împrejurimile. În câte moduri se pot diviza excursioniştii, astfel încât în fiecare grup să nimerească două persoane care cunosc împrejurimile, dacă în total sunt 16 persoane?

20. Fiecare din cei 10 radişti situaţi în punctul A se străduie să ia legătura cu fiecare din cei douăzeci de radişti situaţi în punctul B. Câte variante diferite de stabilire a acestor contacte pot fi?

Demonstraţi egalităţile:

21. $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$;

22. $C_n^m + C_{n-1}^m + \ldots + C_{n-10}^m = C_{n+1}^{m+1} - C_{n-10}^{m+1}$;

23. $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

24. $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$;

25. $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$;

26. $\frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + \ldots + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$;

27. $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n = 3^n$;

28. $2C_n^0 + \frac{2^2C_n^1}{2} + \frac{2^3C_n^2}{3} + \ldots + \frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n-1}-1}{n+1}$;

29. $\frac{C_n^k}{C_n^k + C_n^{k+1}} + \frac{C_n^{k+5}}{C_n^{k+2} + C_n^{k+3}} = \frac{2C_n^{k+1}}{C_n^{k+1} + C_n^{k+2}}$

(unde $n, k \in I\!N$, $n > k+3$);

30. $\frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{2^0}{n!} = \frac{3^n}{n!}$;

31. $\sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{n} \cdot 1/2^k = 2^n$; 32. $\sum_{p=1}^{n} (pC_n^p)^2 = n \cdot C_{2n-1}^{n-1}$;

33. $\sum_{k=0}^{m} C_p^k \cdot C_q^{m-k} = C_{p+q}^{m}$; 34. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k = (-1)^n C_{n-1}^{m}$;

35. $\sum_{k=m}^{n} C_k^m \cdot C_n^k = C_n^m \cdot 2^{n-m}$

(unde $n, k, p, m, q \in \mathbb{N}$).

Să se rezolve ecuaţiile şi sistemele de ecuaţii:

36. $A_x^2 : C_x^{x-1} = 48$;

37. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$;

38. $A_x^4 : (A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}) = 24/23$;

39. $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$;

40. $A_x^3 - 2A_x^4 = 3A_x^2$;

41. $A_x^5 : C_{x-1}^{x-5} = 336$;

42. $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$;

43. $P_{x+2} : (A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3) = 210$;

44. $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = (30/7) \cdot P_x$;

45. $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023$;

46. $P_{x+3} : (A_x^5 \cdot P_{x-5}) = 720$;

47. $C_{2x}^{x+1} : C_{2x+1}^{x-1} = 2/3$;

48. $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

49. $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$;

50. $C_{x+1}^2 : C_x^3 = 4/5$;

51. $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$;

52. $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-2} = 14(x+1)$;

53. $P_{x+6} : (A_{x+4}^{n+4} \cdot P_{x-n}) = 240$;

54. $C_{x+1}^{x-4} = 7/15 \cdot A_{x+1}^3$;

55. $C_{x+1}^3 : C_x^4 = 6 : 5$;

56. $C_{x+1}^2 \cdot A_x^2 - 4x^3 = (A_{2x}^1)^2$;

57. $3C_{x+1}^2 + P_2 \cdot x = 4A_x^2$;

58. $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$;

59. $C_x^3 + C_x^4 = 11C_{x+1}^2$;

60. $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$;

61. $(A_{x+1}^8 + A_x^7) : A_{x-1}^6 = 99$;

62. $A_{x+1}^{n+1} \cdot (x-n)! = 90(x-1)!$;

63. $C_x^5 = C_x^3$;

64. $C_x^3 = 2C_x^{x-2}$;

65. $A_x^6 - 24xC_x^4 = 11A_x^4$;

66. $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$;

67. $\dfrac{1}{P_{x-1}} - \dfrac{1}{P_x} = \dfrac{(x-1)^3}{P_{x+1}}$;

68. $12C_{x-3}^{x+1} = 55A_{x+1}^2$;

69. $C_{5x-x^2+5}^{x} = C_{11}^8$;

70. $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$;

71. $(A_x^{10} - A_x^8) : A_x^8 = 109$;

72. $(n+2)!:(A_n^k\cdot(n-k)!)=132$; 73. $\begin{cases} A_x^y+3C_x^y=90, \\ A_x^y-2C_x^y=40; \end{cases}$

74. $C_{x+1}^y:C_x^{y+1}:C_x^{y-1}=6:5:2$;

75. $(A_{x-1}^y+yA_{x-1}^{y-1}):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1$;

76. $A_x^{y-1}:A_{x-1}^y:(C_{x-2}^y+C_{x-2}^{y-1})=21:60:10$;

77. $C_x^{y-1}:C_x^y:C_x^{y+1}=2:3:4$; 78. $\begin{cases} xA_{x-1}^{y-1}\cdot P_{x-y}=15P_{x-1}, \\ 9C_{x+1}^y=16C_x^{y+1}; \end{cases}$

79. $\begin{cases} A_{2x}^{3y}-8A_{2x}^{3y-1}=0, \\ 9C_{2x}^{3y}-8C_{2x}^{3y-1}=0; \end{cases}$ 80. $\begin{cases} A_x^y=7A_x^{y-1}, \\ 6C_x^y=5C_x^{y+1}; \end{cases}$

81. $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1}+\dfrac{n-1}{k-1}y=\dfrac{k}{n-1}, \\ xC_{n-2}^{k-2}-\dfrac{n-1}{k}y=\dfrac{k-1}{n-1}; \end{cases}$ 82. $\begin{cases} 7C_x^1\cdot y^{x-1}\cdot z=A_8^4, \\ C_x^2\cdot y^{x-2}\cdot z^2=A_{10}^3, \\ 11C_x^3\cdot y^{x-3}\cdot z^3=A_{13}^4. \end{cases}$

Să se rezolve inecuaţiile şi sistemele de inecuaţii:

83. $\dfrac{(x-1)!}{(x-3)!}<72$; 84. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}<1000$;

85. $x(x-3)!<108(x-4)!$; 86. $C_x^5<C_x^6$;

87. $C_x^5>C_x^7$; 88. $C_{20}^{x-1}<C_{20}^x$;

89. $C_{16}^{x-2}>C_{16}^x$; 90. $C_x^5<C_x^3$;

91. $C_{13}^x<C_{13}^{x+2}$; 92. $C_{18}^{x-2}>C_{18}^x$;

93. $C_x^6<C_x^4$; 94. $5C_x^3<C_{x+2}^4$;

95. $C_{x+1}^{x-1}>3/2$; 96. $2C_x^5>11C_{x-2}^3$;

97. $C_x^{x-1}\le C_x^{x-3}$; 98. $C_{2x}^{2x-8}\ge C_{2x}^{2x-12}$;

99. $xC_{x-1}^{x-2}-7C_{x-2}^{x-3}\le 8(x-2)$; 100. $C_{x+1}^{x-2}-C_{x+1}^{x-1}\le 100$;

101. $A_{x+1}^4:C_{x-1}^{x-3}>14P_3$; 102. $C_{x-1}^4-C_{x-1}^3-\dfrac{5}{4}A_{x-2}^4<0$;

103. $C_{x+5}^4-\dfrac{143P_{x+5}}{96P_{x+3}}<0$; 104. $\dfrac{A_{x+2}^3}{P_{x+2}}-\dfrac{143}{4P_{x-1}}<0$;

105. $\begin{cases} C_{2x}^{7} > C_{2x}^{5}, \\ C_{13}^{x} < C_{13}^{x+2}, \end{cases}$

106. $\begin{cases} C_{x+1}^{x-1} < 21, \\ 5C_{x}^{3} < C_{x+2}^{4}, \\ C_{x-1}^{x-3} : A_{x+1}^{4} < 1:14P_3. \end{cases}$

107. Aflaţi termenul al 5-lea din dezvoltarea binomului

$$(2x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^8.$$

108. Aflaţi termenul de mijloc din dezvoltarea binomului

$$(2x + y/2)^8.$$

109. Aflaţi valoarea exponentului m din dezvoltarea binomului

$$(1 + a)^m,$$

dacă coeficientul termenului al 5-lea este egal cu coeficientul termenului al 9-lea.

110. Aflaţi A_n^2, dacă termenul al 5-lea din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt[3]{x} + 1/x)^n$$

nu depinde de x.

111. În dezvoltarea binomului

$$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\,)^n$$

coeficientul termenului al treilea este egal cu 28. Aflaţi termenul de mijloc din dezvoltarea binomului.

112. Aflaţi cea mai mică valoare a exponentului m din dezvoltarea binomului

$$(1 + a)^m,$$

dacă raportul coeficienţilor a doi termeni vecini arbitrari este egal cu 7:15.

113. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt{x} + 1/\sqrt[3]{x}\,)^{16}$$

care conţine x^3.

114. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}}\,)^{15}$$

care nu depinde de a.

115. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$((a\sqrt[3]{a})/6 + 1/\sqrt[15]{a^{28}}\,)^n$$

care nu conţine a, dacă suma coeficienţilor primilor trei termeni din dezvoltare este egală cu 79.

116. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$(1/\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[4]{a^3})^{17}$$

care nu conţine a.

117. Aflaţi termenul liber din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt{\sqrt{x}} + 2/\sqrt[3]{x})^{1989}.$$

118. Aflaţi termenul al 3-lea din dezvoltarea binomului

$$(z^2 + 1/z \cdot \sqrt[3]{z})^m,$$

dacă suma coeficienţilor binomiali este 2048.

119. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$(1/\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[4]{b}/\sqrt[8]{a^3})^n$$

care conţine b^6, dacă raportul coeficienţilor binomiali ai termenilor al patrulea către al doilea este egal cu 187.

120. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$(x\sqrt[4]{x} - 1/\sqrt[8]{x^5})^n$$

care nu conţine x, dacă suma coeficienţilor termenului al doilea de la începutul dezvoltării şi termenului al treilea de la sfârşitul dezvoltării este egal cu 78.

121. Raportul coeficientului termenului al treilea către coeficientul termenului al 5-lea din dezvoltarea binomului

$$(x^{-3/2} - \sqrt[3]{x})^n$$

este egal cu 2/7. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului care conţine $x^{-5/2}$.

122. Aflaţi x, y şi z, dacă se ştie că termenii al 2-lea, al 3-lea şi al 4-lea din dezvoltarea binomului

$$(x + y)^z$$

sunt egali cu 240, 720, 1080, respectiv.

123. Pentru ce valoare a exponentului n coeficienţii termenilor al 2-lea, al 3-lea şi al 4-lea din dezvoltarea binomului

$$(x + y)^n$$

formează o progresie aritmetică?

124. Aflaţi termenii din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$$

care nu conţin iraţionalităţi.

125. Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea binomului

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}?$$

126. Aflaţi rangurile a trei termeni consecutivi din dezvoltarea binomului

$$(a+b)^{23}$$

coeficienţii căruia formează o progresie aritmetică.

127. Aflaţi termenul din dezvoltarea binomului

$$(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^{-3}})^{n}$$

care conţine $x^{6.5}$, dacă termenul al 9-lea are cel mai mare coeficient.

128. Termenul al 3-lea din dezvoltarea binomului

$$(2x+1/x^2)^m$$

nu conţine x. Pentru ce valoare a lui x acest termen este egal cu termenul al 2-lea din dezvoltarea binomului

$$(1+x^3)^{30}?$$

129. Pentru care valori pozitive ale lui x cel mai mare termen din dezvoltarea binomului

$$(5+3x)^{10}$$

este termenul al 4-lea?

130. În dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$$

primii trei termeni formează o progresie aritmetică. Aflaţi toţi termenii raţionali din dezvoltarea acestui binom.

131. Aflaţi valorile lui x pentru care diferenţa termenilor al 4-lea şi al 6-lea din dezvoltarea binomului

$$\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^m$$

este egală cu 56, dacă se ştie că exponentul m al binomului este cu 20 mai mic decât coeficientul binomial al termenului al 3-lea din dezvoltarea acestui binom.

132. Ştiind că n este cel mai mare număr natural cu condiţia $\log_{1/3} n+\log_{n/3} n>0$, determinaţi termenul care conţine b^2 din dezvoltarea binomului $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^n$.

133. Să se determine x pentru care suma dintre termenul al 3-lea şi al 5-lea din dezvoltarea binomului $(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}})^n$ este egală cu 135, ştiind că suma ultimilor trei coeficienţi binomiali este 22.

134. Să se determine x, ştiind că termenul al 6-lea din dezvoltarea binomului

$$(a+b)^n, \text{ unde } a = \sqrt{2^{\lg(10-3^x)}}, \quad b = \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}},$$

este 21, iar coeficienţii binomului ai termenilor de rang 2, 3 şi 4 sunt respectiv I, al III-lea şi al V-lea termen ai unei progresii aritmetice.

135. Există termeni independenţi de x în dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}} + 2/\sqrt[3]{x}\right)^{1988}?$$

Să se scrie aceşti termeni.

136. Câţi termeni din dezvoltarea binomului $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$ sunt termeni întregi?

137. În dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$$

primii trei coeficienţi formează o progresie aritmetică. Să se determine toţi termenii din dezvoltarea binomului care conţin puterile lui y cu exponent natural.

138. Aflaţi x, dacă termenul al 3-lea din dezvoltarea binomului

$$(x + x^{\lg x})^5$$

este egal cu 10^6.

139. În dezvoltarea $(1+x-x^2)^{25}$ să se găsească termenul la care exponentul lui x este de 3 ori mai mare decât suma tuturor coeficienţilor dezvoltării.

140. Să se determine rangul termenului cel mai mare din dezvoltarea binomului $(p+q)^n$ după puterile descrescătoare ale lui p, presupunând că $p > 0$; $q > 0$; $p + q = 1$. Pentru care condiţii:

a) termenul cel mai mare va fi primul?

b) termenul cel mai mare va fi ultimul?

c) dezvoltarea va conţine doi termeni consecutivi egali care sunt mai mari decât toţi ceilalţi termeni ai dezvoltării?

Răspunsuri

Capitolul I

3. a) $A = \{5, 7\}$; $B = \{-7, 2\}$; $C = \{1/7\}$.

4. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.

5. a) $A = \{10, 22, 24, \ldots\}$; b) $26, 28 \in A$, $33 \notin A$ (deoarece A constă din numere naturale pare).

6. $A = \{x \in I\!N^* | x = 1 + 3n,\ n = \overline{1,3}\}$; $B = \{x \in I\!N^* | x = 3 \cdot 2^{n-1},\ n = \overline{1,3}\}$; $C = \{y \in I\!N^* | y = n^2,\ n = \overline{1,5}\}$; $D = \{z \in I\!N^* | z = n^3,\ n = \overline{1,5}\}$.

7. $n(A) = 50$; $n(B) = 9$; a) dacă $ad - bc = 0 \Rightarrow C = \{b/d\}$; b) dacă $ad - bc \neq 0 \Rightarrow C$ are p elemente.

8. $A_1 = \{-1\}$; $A_2 = \{1, 2, 3\}$; $A_3 = \{-1, -2, -3\}$.

9. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $G = (-\infty, 4) \cup (7, +\infty)$; $H = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ etc.

10. a) $B \subset A$, $B \neq A$ etc.

11. $A_6 = C_{I\!N^*}(B)$; $A_7 = A \,\Delta\, B$.

12. a) $A = \{1, 2, 5\}$, $B = E = A \cup B$; b) $A = \{1, 6, 14\}$, $B = \{1, 5, 9, 13, 14\}$, $E = \{1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 18, 20\}$; c) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 9, 10\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; d) $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$; e) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, $C = \{2, 4, 5\}$; f) $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$; g) 1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = E \setminus \{1, 2\}$; 2) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$; 3) $A = \{2, 3, 4\}$,

$B = E \setminus \{4\}$; 4) $A = E \setminus \{5\}$, $B = \{2,3,5\}$; h) 1) $A = E$, $B = \{1,2\}$, $C = \{2,3\}$; 2) $A = \{1,3\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{2,3\}$; i) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,5\}$; j) $A = E$, $B = \{2,4,5\}$, $C = \{3,5,6\}$; k) $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$; l) $E = \{1,2,\dots 10\}$, $A = \{7,8,9,10\}$, $B = \{2,3,4,8,9,10\}$; m) $A = \{a,d,f,h,i\}$, $B = \{b,c,d,e,f,g,i\}$; n) $A = \{1,4,6,8,9\}$, $B = \{2,3,4,5,6,7,9\}$.

13. a) $A = \{6,10,20\}$, $B = \{-47,-8,13,22\}$ etc.; b) $A \cap B = \varnothing$ etc.; c) $A = \{0,2,3\}$, $B = \{-5,-1,1,5\}$ etc.; d) $A = \{0,2\}$, $B = \{2,4\}$ etc.; e) $A = \{-1,0,1,2\}$, $B = \{0,2\}$ etc.; f) $A = \{-4,-3,-2,-1\}$, $B = \varnothing$ etc.; g) $A = \{-1,1,2,4,5,7\}$, $B = \{1,2,4,5,7\}$ etc.; h) $A = \{-33,-18,-13,-9,-8,-6,-5,-4,-2,-1,0,2,3,7,12,27\}$, $B = \{0,2,3,7,12,27\}$ etc.; i) $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, $B = \{2,4,6,8,12\}$ etc.; j) $A \cup B = [-7;7] \cup \{10\}$, $A \setminus B = [-7;-4) \cup (-4;7]$, $B \setminus A = \{10\}$ etc.; k) $A \cap B = \varnothing$ etc.; l) $A \cap B = \{626\}$ etc.; n) $A \cup B = \left\{\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right\}$ etc.

14. a) $A = \{x \in \mathbf{Q} | x = (7n-4)/(n+3),\ n \leq 22,\ n \in \mathbb{N}\}$, B=M, C={2,6}; *b*) n(D)=2497.

15. $A = \{1,2,3,4,8\}$; $B = \{1,3,5,9,10\}$.

16. $A = \{1,6,14\}$; $B = \{1,5,9,13,14\}$; $E = \{1,2,5,6,9,13,14,18,20\}$.

17. a) $A = [5,+\infty)$, $B = (1,+\infty)$, $A \subset B$; b) $A = B = [-9;-4] \cup \cup [4;9]$; c) $A = [-2; 0.5(1+\sqrt{5}))$, $B = [0.5; 0.5(1+\sqrt{5}))$, $B \subseteq A$; d) $A = (-\infty,-1)$, $B = A$; e) $A = B = (3/2,+\infty)$; f) $A = B = \varnothing$; g) $A = [3; \sqrt{37}/2]$, $B = (-\sqrt{37}/2; -3] \cup [3; \sqrt{37}/2)$.

18. a) $m \in \{-2,2\}$, $m \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$, $m \in (-2;2)$; b) $m \in \{-5/2, 5/2\}$, $m \in (-5/2, 5/2)$, $m \in (-\infty,-5/2) \cup (5/2,+\infty)$; c) $m \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$, $m \in (-\infty,-2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3},+\infty)$; d) $m \in \in \varnothing$, $m \in \mathbb{R}$, $m \in \varnothing$; e) $m = -2/3$, $m \neq -2/3$, $m \in \varnothing$; f) $m \in \{-12,12\}$, $m \in (-\infty,-12) \cup (12,+\infty)$, $m \in (-12;12)$; g) $m \in \left\{\frac{1-\sqrt{33}}{6}, \frac{1+\sqrt{33}}{6}\right\}$, $m \in \left(\frac{1-\sqrt{33}}{6}, \frac{1+\sqrt{33}}{6}\right)$,

$m \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{33}}{6}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{33}}{6}, +\infty\right)$; h) $m \in \left\{\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$, $m \in \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, $m \in \left(-\infty, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

19. a) $n(A) = 47$; b) $n(A) = 82$; c) $n(A) = 4$; d) $n(A) = 16$; e) $n(A) = 4$; f) $n(A) = 2$.

20. a) $A \cap B \cap C = \{60t - 17 | t \in I\!N^*\}$; b) $A \cap B \cap C = \{200\}$.

21. a) $A \cap B = \{37, 79\}$; b) $A \cap B = \{37, 79\}$; c) $A \cap B = \{6k+1 | k \in \in \mathbf{Z}, k \in [0; 166]\}$.

24. a) $\{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$; b) $\{(3,3)\}$; c) $\{(1,3)\}$; d) $\{(2,4), (3,4), (2,5), (3,5)\}$; e) $\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4)\}$; f) $\{(1,2), (1,3), (1,4), (4,4)\}$; g) $\{(1,4)\}$ etc.

26. a) $A = (-\infty, -2) \cup [3; 4)$, $B = [3; 4]$ etc.; b) $A = B$ etc.; c) $A = [2; 3]$, $B = [-3; -2]$ etc.; d) $A = (-2; -1) \cup (2, +\infty)$, $B = = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ etc.; e) $A = \{0, -11\}$, $B = \{-4/5, 0, 6/5\}$ etc.; f) $A = (-\infty, -1) \cup (0; 4)$, $B = (-1; 3)$ etc.; g) $A = \varnothing$, $B = \varnothing$ etc.; h) $A = \{7, 35/3\}$; $B = \{-219/8, 7\}$ etc.; i) $A = \{7/4\} = B$ etc.; j) $A = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, $B = (-\infty, -2/5) \cup [4, +\infty)$ etc.; k) $A = = (-\infty, 1] \cup [3/2, +\infty)$, $B = I\!R$ etc.; l) $A = [0, 1/3]$, $B = [-1; 1]$ etc.; m) $A = (-2; 3)$, $B = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ etc.; n) $A = (-\infty, 2] \cup \cup [4, +\infty)$, $B = (-\infty, 2)$ etc.

Capitolul II

2. 1) $G_\alpha = \{(2,5), (2,7)\}$; 2) $G_\alpha = \{(4,1), (4,3), (6,1), (6,3), (8,1), (8,3)\}$; 3) $G_\alpha = \{(8,1), (8,3), (8,5), (8,7)\}$; 4) $G_\alpha = \{(2,1), (2,3)\}$; 5) $G_\alpha = \{(2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (4,1), (6,1), (8,1)\}$; 6) $G_\alpha = \{(8,7)\}$; 7) $G_\alpha = \{(4,1), (4,3), (6,1), (6,3), (8,1), (8,3)\}$; 8) $G_\alpha = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3), (6,5), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7)\}$.

3. 1) $G_\alpha = \{(1,8), (2,7), (4,5)\}$; 2) $G_\alpha = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$; 3) $G_\alpha = \{(3,1)\}$; 4) $G_\alpha = \{(4,1)\}$; 5) $G_\alpha = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (1,8), (2,8), (3,3), (4,8)\}$; 6) $G_\alpha = \{(1,7), (2,3)\}$; 7) $G_\alpha =$

$= \{(1,5),(1,8),(2,1),(2,7),(3,3),(4,5),(4,8)\}$; 8) $G_\alpha = \{(1,1),(2,1),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$.

4. 1) $x + y = 6$; 2) $y = x + 1$; 3) $x < y$; 4) $\max(x,y) > 4$; 5) $\min(x,y) = 2$; 6) $\text{cmmdc}\,(x,y) = 2$; 7) x este par sau $y = 6$; 8) $x = y^2$.

5. 1) tranzitivă; 2) simetrică; 3) simetrică şi tranzitivă; 4) reflexivă, tranzitivă; 5) reflexivă; 6) reflexivă, simetrică; 7), 8) reflexivă, simetrică, tranzitivă; 9) reflexivă, tranzitivă; 10) tranzitivă etc.

6. 1) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, simetrică; 2) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, reflexivă; 3) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, simetrică, antireflexivă; 4) $\delta_\alpha = \{1,4,9,\ldots,n^2,\ldots\}$, $\rho_\alpha = \mathbb{N}$, antisimetrică; 5) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, reflexivă, simetrică, tranzitivă etc. 6) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, antireflexivă, simetrică; 7) $\delta_\alpha = \mathbb{N}$, $\rho_\alpha = \{3,4,5,\ldots\}$, antireflexivă, simetrică; 8) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, reflexivă, antisimetrică, tranzitivă; 9) $\delta_\alpha = \mathbb{N}$, $\rho_\alpha = \{3,4,5,\ldots\}$, antireflexivă, antisimetrică, tranzitivă; 10) $\delta_\alpha = \mathbb{N}$, $\rho_\alpha = \{0,2,4,\ldots\}$, antisimetrică; 11) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, reflexivă, simetrică, tranzitivă; 12) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, simetrică.

9. 1) $\hat{a} = \{a, e/a\}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq e/a$; 2) $a = \sqrt{e}$, avem $\hat{a} = \{\sqrt{e}\}$.

10. $\hat{a} = \{x \in \mathbb{R} | x = a + 2k\pi$ sau $x = \pi - a + 2m\pi$, $k, m \in \mathbf{Z}\}$.

11. a) da; b) $\hat{a} = \{a, 2-a\}$, $\hat{1} = \{1\}$, $\hat{8} = \{8\}$.

12. 1), 2) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{N}$, $\alpha \circ \alpha = \alpha$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \mathbb{N}^2$; 3) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{R}$, $\alpha^{-1} = \alpha$, $\alpha \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} = \mathbb{R}^2$; 4) $\delta_\alpha = \rho_\alpha = \mathbb{R}$, $\alpha \circ \alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4x \geq 9y\}$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \mathbb{R}^2$; 5) $\delta_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho_\alpha = \left[-1; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \circ \alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sin(\sin x) \leq y\}$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]^2$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in [-1; \pi/2]\}$.

15. $\varphi(R) = [-1;1]$; $\varphi((0;\pi)) = (0;1]$; $\varphi^{-1}([-1;0]) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]$; $\left\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi | n \in \mathbf{Z}\right\}$; $\{\pi/2 + 2k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$; $\varnothing$.

16. B; $\{b,d\}$; $\{b,c,d\}$; $\{a,b,e\}$; $\{3,5,7,4,6\}$; $\{6,9\}$; $\{2,8\}$.

18. $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$; $\{1,2,3\}$.

23. 1) bijectivă; 2) nu este bijectivă; 3) bijectivă; 4) nu este bijectivă; 5) bijectivă; 6) nu este bijectivă; 7) bijectivă; 8) nu este bijectivă; 9) injectivă; 10) nu este injectivă; 11) injectivă; 12) surjectivă; 13) nu este surjectivă; 14) surjectivă; 15) surjectivă.

29. 1) $u(x) = 4x - 9$, $v(x) = 7x^5 + 4$, $f(x) = (v \circ u)(x)$; 2) $u(x) = x^2 + 3x$, $v(x) = x^{2/3} + x^{1/3} - 7$, $f(x) = (v \circ u)(x)$; 3) $u(x) = x^2 - 3$, $v(x) = 1/\sqrt{x}$, $f(x) = (v \circ u)(x)$ etc.

30. 1) $(f \circ g)(x) = x + 1 = (g \circ f)(x)$; 4; 4; 2) $(f \circ g)(x) = (x-3)^2+8$, $(g \circ f)(x) = x^2+5$; 8; 14; 3) $(f \circ g)(x) = f(x) = g(x)$; 3; 3; 4) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x$, $(g \circ f)(x) = x^2$; 12; 9; 5) $(f \circ g)(x) = 2x^4 - 4x^2+3$, $(g \circ f)(x) = 2x^4+4x^2$; 129; 360; 6) $(f \circ g)(x) = x^6 = (g \circ f)(x)$; 729; 729; 7) $(f \circ g)(x) = 4x^4$, $(g \circ f)(x) = -2x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 8x - 3$; 4; -1; 8) $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 18x + 29$, $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 1$; 50; 2 etc.

31. 1) 9; 2) 3; 3) 8; 4) 4; 5) 12; 6) 16; 7) -9; 8) -7; 9) 2.25; 10) 0,75; 11) $6+4\sqrt{2}$; 12) $27+18\sqrt{2}$; 13) $9c^2$; 14) $3c-3$; 15) $9c^2-18c+9$; 16) $9c^2 - 18c + 9$.

32. 1) da; 2) nu; 3) da; 4) da; 5) da; 6) nu; 7) nu; 8) nu.

33. 1) $f^{-1}(4) = 3$; 2) $f^{-1}(6) = 0.5$; 3) $f^{-1}(b) = a$; 4) $f^{-1}(2) = a + 1$; 5) $f^{-1}(p) = m + n$.

34. 1) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x-1}$; 2) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2}$; 3) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; 4) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 5) $f^{-1}(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 6) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; 7) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{1-x^2}$; 8) $f^{-1}(x) = (x^2+2)^2 - 2$; 9) $f^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 10) $f^{-1}(x) = \dfrac{4(\sqrt{x}+2)^2}{1-(\sqrt{x}+2)^2}$.

36. 1) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2, \\ 4 - x, & x < 2, \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ 2 - x, & x < 1. \end{cases}$

2) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} (4x-2)^2 - 1, & x \leq 0, \\ (3x^2-2)^2 - 1, & x \in (0; \sqrt{2/3}], \\ -5(3x-2)^2 - 1, & x > \sqrt{2/3}; \end{cases}$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}3(x^2-1)-2, & x<-1,\\ 4(x^2-1)-2, & -1\le x\le 0,\\ 4(-5x-1)-2, & x>0.\end{cases}$$

Capitolul III

1. 42. **2.** 1140. **3.** 364. **4.** 124. **5.** $30!-2\cdot 29!$ **6.** 2520. **7.** 204. **8.** 2027025. **9.** 105. **10.** $30^2\cdot 10^4$. **11.** $n\cdot m\cdot k$. **12.** $2(P_5)^2=2\cdot(120)^2$. **13.** $2(P_6)^2=2\cdot(720)^2$. **14.** $\overline{A_3^7}=3^7\cdot 15$. **15.** $A_3^2\cdot A_5^4=120$. **16.** $4\cdot 7^3=1372$. **18.** $C_{20}^6\cdot \overline{P}_6$; $C_{20}^3\cdot C_{20}^2\cdot C_{20}^1$. **19.** 62. **20.** $0.5C_4^2\cdot C_{12}^6=2772$. **36.** 4. **37.** 5. **38.** 5. **39.** 5. **40.** 3. **41.** 14. **42.** 7. **43.** 5. **44.** 7. **45.** 10. **46.** 7. **47.** 4. **48.** 11. **49.** 5. **50.** 7. **51.** 8. **52.** 4. **53.** 10. **54.** 10. **55.** 8. **56.** 9. **57.** 3. **58.** 3. **59.** 13. **60.** 10. **61.** 9. **62.** 9. **63.** 8. **64.** 8. **65.** 9. **66.** 10. **67.** 1; 3. **68.** $\varnothing$. **69.** 3. **70.** 9; 10. **71.** 19. **72.** 10. **73.** (5,3). **74.** (8,3). **75.** (7,3). **76.** (7,3). **77.** (34,14). **78.** (15,7). **79.** (8,3). **80.** (10,4). **81.** $\left(\frac{2}{C_n^k},\ \frac{k(k-1)(2k-n)}{n(n-1)^2}\right)$. **82.** $\varnothing$. **83.** $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. **84.** $\{1,2,3,4,5,6\}$. **85.** $\{4,5,6,7,8,9,10,11\}$. **86.** $\{x>11 | x\in \mathbb{N}\}$. **87.** $\{7\le x<11 | x\in \mathbb{N}\}$. **88.** $\{1\le x\le 10 | x\in \mathbb{N}\}$. **89.** $\{9<x<18,\ x\in \mathbb{N}\}$. **90.** $\{5,6,7\}$. **91.** $\{0,1,2,3,4,5\}$. **92.** $\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$. **93.** $\{6,7,8,9\}$. **94.** $\{x>14 | x\in \mathbb{N}\}$. **95.** $\{x\ge 2 | x\in \mathbb{N}\}$. **96.** $\{x\ge 12 | x\in \mathbb{N}\}$. **97.** $\{5,6,\ldots\}$. **98.** $\{10\}$. **99.** $\{3,4,\ldots,13\}$. **100.** $\{2,3,4,\ldots,9\}$. **101.** $\{n\ge 8 | n\in \mathbb{N}\}$. **102.** $\{5,6,7,8,9,10\}$. **103.** $\{1,2,3,\}$. **104.** $\{2\le x\le 36 | x\in \mathbb{N}\}$. **105.** $\varnothing$. **106.** $\varnothing$. **107.** $1120x^7\cdot\sqrt[3]{x}$. **108.** $70x^4y^4$. **109.** 12. **110.** 240. **111.** $70(1-x^2)^2$. **112.** $m=\frac{22k+15}{7}$, cea mai mică valoare $k=6$, atunci $m=21$. **113.** $C_{16}^6\cdot x^3$. **114.** $T_6=C_{15}^6$. **115.** $T_5=C_{12}^5\cdot 6^{-7}$. **116.** $T_9=C_{17}^8$. **117.** $T_{1378}=C_{1989}^{1377}\cdot 2^{1377}$. **118.** $T_3=55z^{50/3}$. **119.** $C_{35}^{32}b^6a^{-12}$. **120.** $C_{12}^4=T_4$. **121.** $84x^{-5/2}$. **122.** $(2,3,5)$. **123.** 7. **124.** $T_{14+1}=36C_{24}^{10}$. **125.** 26. **126.** $\{T_9,T_{10},T_{11}\}$ și $\{T_{14},T_{15},T_{16}\}$. **127.** $T_2=C_{18}^2\cdot x^{6.5}=153x^{6.5}$.

128. 2. **129.** $5/8 < x < 20/21$. **130.** $\{T_0, T_4, T_8\}$. **131.** 1. **132.** $T_7 = 28ab^2$. **133.** $\{-1, 2\}$. **134.** $\{0, 2\}$. **135.** $T_{1421} = C_{1988}^{1420} \cdot 2^{1420}$. **136.** $\{T_1, T_{16}, T_{31}\}$. **137.** $n = 8$, avem $T_1 = y^4$, $T_5 = \frac{35}{8}y$; $n = 4$, avem $T_1 = y^2$. **138.** 10.

Notă. Pentru capitolele I şi II au fost indicate doar răspunsurile mai puţin "voluminoase" şi cele care se obţin relativ mai complicat (la părerea noastră).

Bibliografie

1. *Goian I., Grigor R., Marin V.* Bacalaureat "Matematică" 1993 – 1995. Republica Moldova. – Chişinău: "Amato" S.R.L., 1996.
2. *Goian I., Grigor R., Marin V.* Bacalaureat "Matematică" 1996. Republica Moldova. – Chişinău: Evrica, 1997.
3. *Ionescu-Ţău C., Muşat Şt.* Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasele IX – X. – Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, 1978.
4. *Militaru C.* "Algebra", Exerciţii şi probleme pentru liceu şi admitere în facultate. – Bucureşti: Editura "Alux" S.R.L, 1992.
5. *Năstăsescu C., Niţă C., Popa S.* Matematică "Algebra", manual pentru clasa X-a. – Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, 1994.
6. *Petrică I., Lazăr I.* Teste de matematică pentru treapta I-a şi a II-a de liceu. – Bucureşti: Albatros, 1981.
7. *Sacter O.* Culegere de probleme de matematică propuse la examenele scrise de maturitate şi de admitere în institute şi facultăţi. – Bucureşti: Editura tehnică, 1963.
8. *Stamate I., Stoian I.* Culegere de probleme de algebră pentru licee. – Bucureşti: Editura didactică şi pedagogică, 1971.
9. *Şahno C.I.* Culegere de probleme de matematică elementară / Traducere din limba rusă de I. Cibotaru. – Chişinău: Lumina, 1968.
10. *Цыпкин А.Г., Пински А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. – М.: Наука, 1983.
11. *Ляпин С.Е. Баранова И.В., Борчугова З.Г.* Сборник задач по элементарной алгебре – М.: Просвещение, 1973.

CUPRINS

LA EDITURA CARTIER AU APĂRUT

Colecţia CARTIER ENCICLOPEDIC
Dicţionar enciclopedic ilustrat
Horia Zava - *Dicţionar Eminescu*

Colecţia ALEEA CLASICILOR
Mihai Eminescu — *Poezii*
George Coşbuc — *Poezii*
Octavian Goga — *Poezii*
Ion Minulescu — *Poezii*
Ion Creangă — *Scrieri*
Eugen Lungu — *Poeţi de pe vremea lui Eminescu*
Alexandru Macedonski — *Poezii*

Colecţia CĂRŢI CELEBRE
Emil Gârleanu - *Din lumea celor cari nu cuvîntă*
Plutarh - *Oameni iluştri ai Greciei*
Plutarh - *Oameni iluştri ai Romei*

Colecţia POESIS/CARTIER CLASIC
Esenin - *Opera poetică.* Traducere de George Lesnea *(casetă, 2 volume)*
Eminescu - *Opera poetică (casetă, 4 volume)*
Macedonski - *Versuri,* Petică - *Versuri,* Pillat - *Versuri (casetă, 3 volume)*
Urmuz - *Pagini bizare,* Fundoianu - *Versuri,* Voronca - *Versuri (casetă, 3 volume)*
Topîrceanu — *Versuri,* Minulescu — *Versuri* (*casetă, 2 volume*)
Ibrăileanu — *Spiritul critic în cultura românească, Adela* (*casetă, 2 volume*)

Colecţia PRIMA MEA BIBLIOTECĂ
H.Ch.Andersen — *Cele mai frumoase poveşti*
Vasile Alecsandri — *Serile la Mirceşti*
Ion Creangă — *Punguţa cu doi bani*
Ion Creangă — *Povestea lui Harap-Alb*
Alexandru Donici — *Grierul şi furnica*
Mihai Eminescu — *Crăiasa din poveşti*

Seria CARTIER ISTORIC
Constantin Stere: *Singur împotriva tuturor*
Constantin Stere: *Victoria unui înfrînt*
Ion Chirtoagă — *Istoria românilor. Epoca medievală*
Eric Hobsbawm — *O istorie a secolului XX. Era extremelor*
Octavian Şofransky — *Republica Moldova: capital geopolitic*
Dinu Poştarencu — *O istorie a Basarabiei (1812 - 1940)*
Andrei Ţurcanu — *Sabatul sau Noaptea vrăjitoarelor politicii moldoveneşti.*

Seria ROTONDA

Paul Goma — *Altina. Grădina scufundată*
Alexandru Muşina — *Eseu asupra poeziei moderne*
Em. Galaicu-Păun — *Poezia de după poezie. Ultimul deceniu*
Ghenadie Postolache — *Sezonul cerşetorilor*
Doru Ciocanu — *Dicţionar auafed*
Constantin Cheianu — *Totul despre mine!*
Irina Nechit — *Godot eliberatorul*
Vladimir Bulat — *Artă şi ideologie*
Cristina Cîrstea — *Ceva care să-mi amintească de mine*
Ghenadie Postolache — *Rondul*

Seria CARTIER EDUCAŢIONAL

An Anthology of American Literature and Culture. Editor: Hamilton Beck *(2 volume)*
English Home-Reading *(for universities, high and secondary schools)*
English. *Manual de limbă şi literatură engleză pentru clasa a X-a*
Le français. *Exercices et tests de grammaire. Bacalaureat*
Limba română. Teste la limba şi literatura română, şcolile alolingve. *Bacalaureat*
Vasile Marin (coordonator) — *Algebră. Ecuaţii şi inecuaţii. Vol. I. Bacalaureat*
Muzica. *Manual pentru clasa I*
Muzica. *Crestomaţie pentru clasa I*
Limba română. *Culegere de texte pentru clasa I*
L'arc-en-ciel. *Manual de limbă franceză pentru clasele a III-a, a IV-a, a V-a*
Lumina gîndului. *Manual de limbă română pentru clasa a XI-a a şcolii alolingve*
Albinuţe. *Manual de limbă română pentru clasa a III-a a şcolii alolingve*
Făguraş. *Manual de limbă română pentru clasa a IV-a a şcolii alolingve*
Limba română. *Ghidul învăţătorului pentru clasele a III-a şi a IV-a, şcoala alolingvă*
Limba bulgară. *Manual pentru clasa a III-a*
Literatura română. *Material didactic pentru clasa a VIII-a a şcolii alolingve*
Eugenia Gondiu — *Atestarea cadrelor didactice*
Nicolae Bucun (coordonator) — Tehnologii educaţionale. *Ghid metodologic*

ÎN AFARA COLECŢIILOR

Thrainn Eggertsson - *Economia neoinstituţională*
Coranul
Republica Moldova în imagini *(album)*
George Meniuc sau Întoarcerea în Itaca
Alexandru Burlacu - *Proza basarabeană: fascinaţia modelelor (anii '20-'30)*

CARTIER
educational

ISBN 9975-79-040-2

9 789975 790406